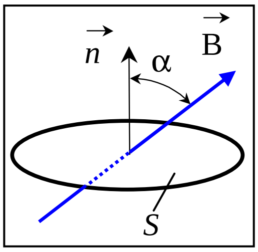
Лекции 7-8. Теорема Гаусса для магнитного поля. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Проводники с током в магнитном поле.

Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. Поле на границе раздела магнетиков. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в электрических и магнитных полях. Ускорение заряженных частиц. Эффект Холла. Закон Ампера. Магнитный момент контура с током. Контур с током в магнитном поле. Поток вектора магнитной индукции. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Магнитный поток. Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через ориенти-



рованную поверхность S называется величина $\Phi_{\vec{B}} = \iint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$. Единицы измерения магнитного потока Вебер (Вб). В случае, когда площадка – плоская, а магнитное поле – однородное магнитный поток равен: $\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos\alpha$, где S – величина площади, B – величина индукции, α - угол между нормалью $\vec{n}$ к площадке контура и вектором $\vec{B}$.

Так как силовые линии магнитного поля замкнуты (магнитное поле является вихревым), то они нигде не начинаются и не оканчиваются – поэтому магнитный поток через *любую* замкнутую поверхность равен нулю (сколько линий «вошло» внутрь замкнутой поверхности – столько же и «вышло»):

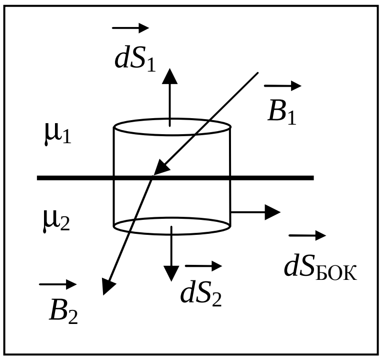
$$\oiint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0.$$

Это выражение *теоремы Гаусса для магнитного поля* в интегральной форме.
Следовательно, *в дифференциальной форме теорема Гаусса* имеет вид:

$$div\left(\vec{B}\right) = 0$$

это означает, что в природе нет точечных источников магнитного поля, т.е. раздельных положительных и отрицательных магнитных зарядов.

Соотношения для векторов магнитного поля на границе раздела магнетиков.



Рассмотрим плоскую границу раздела двух магнетиков, с обеих сторон от которой магнитное поле можно считать однородным. По теореме Гаусса для магнитного поля

$$\oiint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$$

В качестве поверхности S возьмём прямой цилиндр, основания которого параллельны границе, и граница делит этот цилиндр пополам. Тогда

$$\oiint_S \left(\vec{B},d\vec{S}\right)=\iint_{S_1}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)+\iint_{S_2}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)+\iint_{S_{БОК}}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0\,.$$

При стягивании цилиндра к границе $\iint_{S_{БОК}}\left(\vec{B},d\vec{S}\right)\to 0$, поэтому

$$\oiint_S \left(\vec{B},d\vec{S}\right)\to \left(B_{2n}-B_{1n}\right)S_{ОСН}=0$$

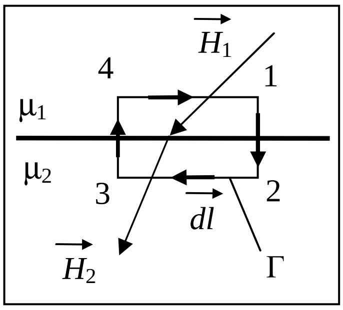
Таким образом, на границе должно выполняться соотношение

$$B_{2n}=B_{1n}$$

при переходе через границу раздела магнетиков нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля не изменяется.

Теперь воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля

$$\oint_\Gamma \left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\sum_k I_{CT\_k}\,.$$



В качестве замкнутой траектории рассмотрим прямоугольник, две стороны которого параллельны границе раздела магнетиков, и граница делит прямоугольник пополам. Выбираем направление в контуре обхода по часовой стрелке. Тогда

$$\oint_\Gamma \left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\int_1^2\left(\vec{H},d\vec{l}\right)+\int_2^3\left(\vec{H},d\vec{l}\right)+\int_3^4\left(\vec{H},d\vec{l}\right)+\int_4^1\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=\sum_k I_{CT\_k}$$

При стягивании контура к границе $\int_1^2\left(\vec{H},d\vec{l}\right)\to 0$ и $\int_3^4\left(\vec{H},d\vec{l}\right)\to 0$, поэтому

$$\oint_\Gamma \left(\vec{H},d\vec{l}\right)\to \left(H_{2t}-H_{1t}\right)l=\sum_k I_{CT\_k}$$

где l – длина контура вдоль границы раздела магнетиков.

Поэтому $H_{1t}-H_{2t}=\dfrac{\sum_k I_{CT\_k}}{l}$. Если ввести суммарную линейную плотность тока на границе раздела магнетиков $i_{ПОВ}=\dfrac{\sum_k I_{CT\_k}}{l}$, то

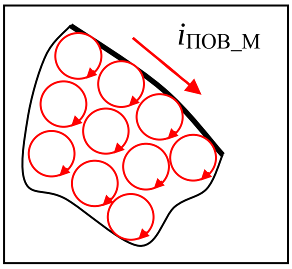
$$H_{2t}-H_{1t}=i_{ПОВ}\,.$$

Изменение величины касательной проекции вектора напряженности магнитного поля при переходе через границу равно линейной плотности токов проводимости на границе.

Если ток проводимости на границе раздела магнетиков отсутствует $i_{ПОВ}=0$, то

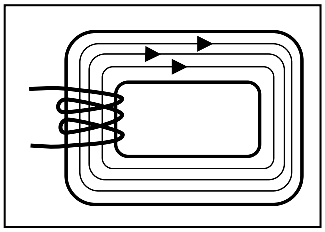
$$H_{1t}=H_{2t}$$

т.е. при переходе через границу раздела магнетиков (при отсутствии тока) касательная составляющая вектора напряжённости магнитного поля остаётся неизменной.

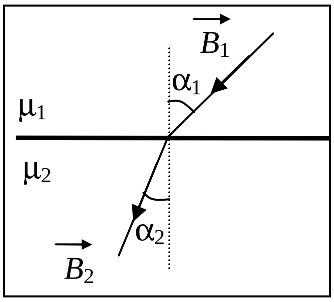


По аналогии можно написать для вектора намагниченности

$$J_{2t} - J_{1t} = i_{ПОВ\_М}$$



при переходе через границу раздела магнетиков изменение величины касательной составляющая вектора намагниченности магнитного поля остаётся равно поверхностной плотности молекулярных токов. Это утверждение можно пояснить следующим образом: внутри магнетика суммарный молекулярный ток через любую поверхность равен нулю. Но на границе магнетика токи не «компенсируют» друг друга, поэтому появляется поверхностный ток.



Рассмотрим преломление силовых линий на границе раздела

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{B_{2t}}{B_{2n}}\frac{B_{1n}}{B_{1t}} = \frac{B_{2t}}{B_{1t}}\frac{B_{1n}}{B_{2n}} = \frac{\mu_0\mu_2 H_{2t}}{\mu_0\mu_1 H_{1t}}\frac{B_{1n}}{B_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

т.е. силовые линии больше отклоняются от нормали со стороны магнетика с большей магнитной проницаемостью. В этом смысле говорят, что магнетики с большей магнитной проницаемостью конденсируют магнитное поле. На этом явлении основан принцип применения *магнитопроводов*. Если в замкнутом контуре, выполненным из магнетика с большим значением μ, создать магнитное поле (например, с помощью катушки с током), то силовые линии магнитного поля практически не выйдут из контура.

Замечание. Между электростатическим и магнитостатическим полями можно установить аналогию. Рассмотрим уравнения

$$\oiint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q,\ \oiint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0,\ \oint_\Gamma \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0,\ \oint_\Gamma \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = I,$$

$$D_{1n} = D_{2n},\ B_{1n} = B_{2n},\ E_{1t} = E_{2t},\ H_{1t} = H_{2t},\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

Из них следует аналогия между векторами

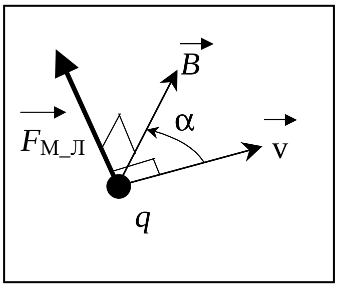
$\vec{D}$ - электрического смещения (или электрической индукции) и $\vec{B}$ - магнитной индукции,

напряженностями полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Но силовыми характеристиками полей являются только $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Остальные два вектора имеют «вспомогательный» смысл, но их введение позволяет записывать уравнения в симметричном виде.

СИЛА ЛОРЕНЦА

Опыт показывает, что на заряженную частицу, которая *движется* в магнитном поле, действует сила, которая называется *магнитной силой* Лоренца. Если скорость частицы $\vec{v}$, заряд частицы q, индукция магнитного поля $\vec{B}$, то вектор магнитной силы Лоренца определяется соотношением



$$\vec{F}_{М\_Л} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Векторы $\left(\vec{v},\vec{B},\vec{F}_{М\_Л}\right)$ образуют правую тройку векторов.

Величина силы

$$F_{М\_Л} = qvB\sin\alpha,$$

здесь α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Замечание. Напомним *практическое* правило: направление вектора силы $\vec{F}_{М\_Л}$, действующей на *положительный* заряд $q>0$, определяется *правилом левой руки*: вектор силы $\vec{F}_{М\_Л}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$. При этом, если вектор индукции $\vec{B}$ входит в ладонь левой руки, пальцы (собранные вместе) направлены вдоль вектора скорости $\vec{v}$, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на положительный заряд (для отрицательного заряда – правая рука).

Так как вектор магнитной силы Лоренца перпендикулярен скорости, то её мощность и работа равна нулю. *Поэтому кинетическая энергия* (*и величина скорости*) *заряженной частицы, движущейся только в магнитном поле остается постоянной.*

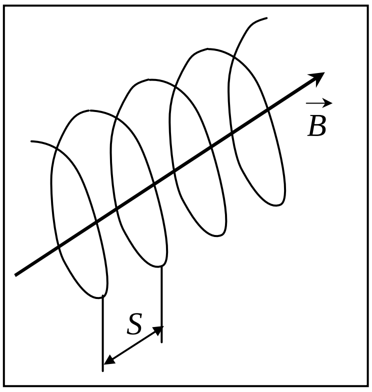
Пример. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ частица массой m и зарядом q. Угол между вектором скорости и магнитной индукцией равен α. Как будет двигаться частица в магнитном поле?

Решение. Разложим вектор скорости частицы на две составляющих $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, где $\vec{v}_\perp$ - вектор, перпендикулярный $\vec{B}$, а $\vec{v}_\parallel$ - вектор, параллельный $\vec{B}$. Тогда $v_\perp = v\cdot\sin\alpha$, $v_\parallel = v\cdot\cos\alpha$. Перейдем в систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью $\vec{v}_\parallel$. Тогда в этой системе отсчета частица движется только со скоростью $\vec{v}_\perp$, перпендикулярной $\vec{B}$.

Вектор магнитной силы Лоренца направлен перпендикулярно скорости частицы, поэтому она создает нормальное ускорение

$$ma_n = q\cdot v_\perp\cdot B = q\cdot v\cdot B\cdot\sin\alpha,$$

следовательно, траекторией является окружность, вектор ускорения $\vec{a}_n$ направлен к центру этой окружности. Найдем радиус окружности: $m\frac{v_\perp^2}{R} = qv_\perp B$, отсюда $R = \frac{m}{q}\frac{v_\perp}{B} = \frac{v \cdot sin\,\alpha}{(q/m)B}$, где q/m – удельный заряд частицы. Период оборота частицы:



$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi}{v_\perp}\frac{m}{q}\frac{v_\perp}{B} = 2\pi\frac{m}{Bq}.$$

Оказывается *период оборота не зависит от скорости частицы.*

Теперь вернемся в начальную систему отсчета, где частица также движется вдоль линии поля со скоростью $v_\parallel$. В этой системе отсчета траектория частицы является винтовой линией радиуса $R = \frac{v \cdot sin\,\alpha}{(q/m)B}$ и шагом

$$S = v_\parallel \cdot T = v \cdot cos\,\alpha \cdot 2\pi\frac{m}{Bq} = 2\pi\frac{mv \cdot cos\,\alpha}{Bq}.♣$$

Магнитная сила Лоренца *зависит от системы отсчёта*. Например, в сопутствующей системе отсчёта, где частица покоится, магнитная сила Лоренца равна нулю. Но в классической механике вектор силы не зависит от системы отсчёта. Опыт показывает, что таким вектором силы, не зависящим от системы отсчёта, является $\vec{F}_Л = q\vec{E} + q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$. Эта называется *силой Лоренца*. Здесь $\vec{E}$ - вектор напряжённости электрического поля.

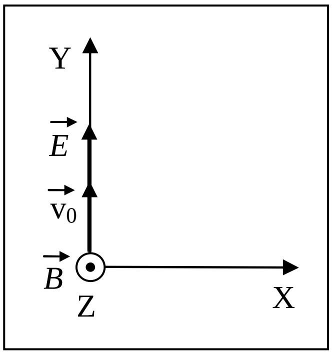
В частном случае, когда частица движется только в магнитном поле (т.е. $\vec{E} = \vec{0}$), сила Лоренца совпадает с магнитной силой Лоренца $\vec{F}_Л = \vec{F}_{Л\_М}$. Однако, если перейти в систему отсчёта, где частица в данный момент времени покоится ($\vec{v} = \vec{0}$), то в этой системе будет $\vec{F}_{Л\_М} = \vec{0}$. Но вектор силы Лоренца не должен измениться, поэтому

$$q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q\vec{E}' + q\left(\vec{0} \times \vec{B}'\right) = q\vec{E}'.$$

Не смотря на то что в старой системе отсчёта электрического поля не было $\vec{E} = \vec{0}$, в новой системе отсчёта появится электрическое поле, напряжённость которого $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$.

Пример. Рассмотрим движение положительно заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях, для случая, когда $\vec{E} \perp \vec{B}$. Масса частицы *m*.

Решение. Введём декартову систему координат так, чтобы вектор $\vec{E}$ был направлен вдоль оси Y, а вектор $\vec{B}$ вдоль оси Z, будем считать, что начальная скорость частицы направлена вдоль оси Y, т.е. в координатной форме $\vec{E}=(0,E,0)$, $\vec{B}=(0,0,B)$, $\vec{v}_0=(0,v_0,0)$. Предположим, что в начальный момент времени (t=0) частица находилась в начале координат.



Уравнение динамики (второй закон Ньютона) для частицы

$$m\vec{a}=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

т.к. $\vec{v}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ v_X & v_Y & v_Z\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=$

$=\vec{e}_X\left(v_YB_Z-v_ZB_Y\right)+\vec{e}_Y\left(v_ZB_X-v_XB_Z\right)+\vec{e}_Z\left(v_XB_Y-v_YB_X\right)$,

($\left(\vec{e}_X,\vec{e}_Y,\vec{e}_Z\right)$ - орты декартовой системы координат), то, учитывая заданные значения, в координатах уравнение динамики примут вид:

$$\begin{cases}ma_X=qv_YB\\ ma_Y=qE-qv_XB\\ ma_Z=0\end{cases}$$

Решение третьего уравнения имеет вид $z=z_0+v_{0Z}\cdot\left(t-t_0\right)$. Из первых двух уравнений выражаем скорости $v_Y=\frac{m}{qB}a_X$, $v_X=\frac{E}{B}-\frac{m}{qB}a_Y$ и подставляем в ускорения $a_X=\dot{v}_X$ и $a_Y=\dot{v}_Y$.

Первое уравнение имеет вид $\ddot{v}_X+\left(\frac{qB}{m}\right)^2v_X=\left(\frac{q}{m}\right)^2BE$ и его решение $v_X=\frac{E}{B}+C_1\,sin\left(\frac{qB}{m}t+\varphi_1\right)$.

Второе уравнение $\ddot{v}_Y+\left(\frac{qB}{m}\right)^2v_Y=0$, его решение $v_Y=C_2\,sin\left(\frac{qB}{m}t+\varphi_2\right)$.

Подставляем начальные условия при t=0 для скоростей и ускорений.

Для скорости получаем

$v_X=\frac{E}{B}+\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2+\left(v_0\right)^2}\,sin\left(\frac{qB}{m}t-arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right)$, $v_Y=\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2+\left(v_0\right)^2}\,sin\left(\frac{qB}{m}t+arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right)$,

$v_Z=0$.

Для координат

$$x=\frac{E}{B}t+\frac{mv_0}{qB}-\frac{m}{qB}\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2+\left(v_0\right)^2}\,cos\left(\frac{qB}{m}t-arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),$$

$$y=\frac{mE}{qB^2}-\frac{m}{qB}\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2+\left(v_0\right)^2}\,cos\left(\frac{qB}{m}t+arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),\ z=0.$$

Траектория частицы представляет собой эллипс, центр которого движется со скоростью $v_C = \dfrac{E}{B}$. При этом направление *движения центра окружности не зависит от знака заряда частицы*.♣

Ускорение заряженных частиц

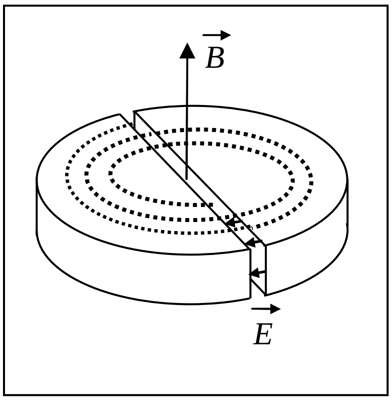
Ускорители – установки, предназначенные для ускорения заряженных частиц до высоких энергий (выше 1МэВ, т.е. выше $1{,}6\cdot 10^{-13}$ Дж).

В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с электрическим и магнитным полями. Электрическое поле способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать её энергию. Магнитное же поле, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя её энергии, и задаёт орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно разделит на линейные и циклические.

В *линейных* ускорителях частицы движутся практически по прямой траектории, разгоняясь при движении специальными электромагнитными устройствами.

В *циклических* ускорителях частицы движутся по практически замкнутой траектории под действием магнитной силы Лоренца и разгоняются электрическим полем на определённых участках.



Принцип действия *циклотрона* основан на независимости периода оборота заряженной частицы в магнитном поле от её скорости $T = 2\pi \dfrac{m}{Bq}$.

Два полых электрода (дуанты), выполненных в виде половинок невысокого цилиндра, находятся в вертикальном однородном магнитном поле. Система помещена в ёмкость, внутри которой откачан воздух. Когда частицы попадают в зазор между дуантами, в зазоре включается электрическое поле, разгоняющее частицы. Через половину оборота частицы подходят к щели с другой стороны, и опять включается разгоняющее электрическое поле. Скорость частиц в зазоре увеличивается, поэтому радиус траектории увеличивается. Частота колебаний напряжения между дуантами совпадает с частотой вращения частиц.

В *фазотроне* индукция магнитного поля уменьшается к краям, следовательно, при увеличении радиуса траектории начинает увеличиваться период оборота частиц. Поэтому, по мере разгона частиц, уменьшают частоту колебаний напряжения между дуантами.

В *синхротроне* траектория частиц не меняется – это обеспечивается изменяющимся во времени магнитным полем.

Примером ускорителя является **Большой адро́нный колла́йдер** (англ. *Large Hadron Collider, LHC*; сокр. БАК) — ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжёлых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. Коллайдер построен в научно-исследовательском центре Европейского совета ядерных исследований (фр. *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN*), на границе Швейцарии и Франции, недалеко от Женевы. БАК является самой крупной экспериментальной установкой в мире. Большим он назван из-за своих размеров: длина основного кольца ускорителя составляет 26659 м; адронным - из-за того, что он ускоряет адроны (частицы, участвующие в сильном взаимодействии); коллайдером (англ. *collide* — сталкиваться) — из-за того, что пучки частиц ускоряются в противоположных направлениях и сталкиваются в специальных точках столкновения.

Эффект Холла

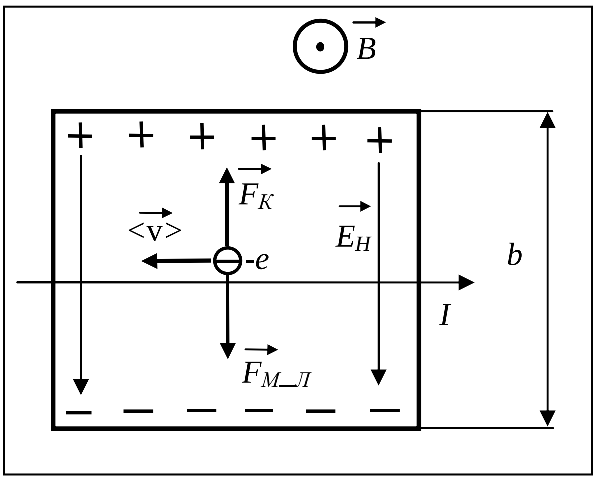
Помещаем в однородное магнитное поле (металлический) проводник выполненный в виде прямоугольного параллелепипеда так, чтобы силовые линии магнитного поля были направлены перпендикулярно одной из пар граней. Затем через вторую пару граней пропускаем электрический ток. Тогда между третьей парой граней появится напряжение. Это явление называется *эффектом Холла* или *гальваномагнитным* явлением.

Напряжение Холла между гранями

$$U_H = R_H bjB$$

R_H – постоянная Холла, b –расстоянии между гранями, между которыми возникает напряжение, j – величина плотности тока, B – величина магнитной индукции.

Ток в металлах создаётся валентными (свободными) электронами. Так как знак заряда электронов отрицательный, то они движутся против положительного направления для тока. На



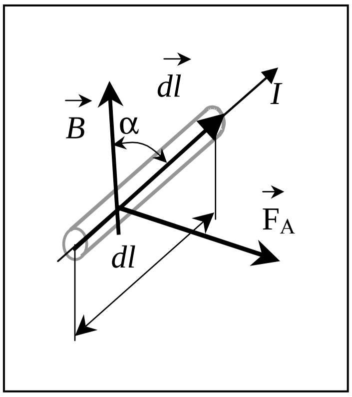
движущиеся электроны в магнитном поле действует магнитная сила Лоренца, под действием которой электроны начинают перемещаться к одной из граней, где образуется избыточный отрицательный заряд. Тогда у противоположной грани будет наблюдаться недостаток электронов, т.е. избыток положительного (не скомпенсированного) заряда. Т.е. произойдёт разделение электрических зарядов у пары противоположных граней, что приведёт к появлению «наведённого» (индуцированного) электрического поля, напряженность которого E_H. Со стороны этого поля на электроны будет действовать сила Кулона, вектор которой будет направлен против вектора магнитной силы Лоренца. Когда перераспределение зарядов «закончится» (наступит равновесие для движения в поперечном направлении), то эти силы уравновесят друг друга $\vec{F}_K + \vec{F}_{M\_Л} = \vec{0}$, откуда $qE_H = q\langle v\rangle B$. Величина напряжённости электрического поля (Холла) $E_H = \langle v\rangle B$. Среднюю скорость упорядоченного движения носителей можно найти из выражения для плотности тока $\vec{j} = qn\langle\vec{v}\rangle$, откуда $\langle v\rangle = \dfrac{j}{qn}$. Для напряжения Холла $U_H = E_H b$, поэтому $U_H = \dfrac{j}{qn}Bb$. Следовательно, постоянная Холла $R_H = \dfrac{1}{qn}$.

Эффект наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках. По знаку постоянной Холла судят о знаке заряда носителей.

Эффект Холла используется, например, в приборах, регистрирующих магнитные поля.

*Замечание***.** *Магнетосопротивление* (магниторезистивный эффект) — изменение электрического сопротивления вещества в магнитном поле. Все проводники в той или иной мере обладают магнетосопротивлением. Явление качественно можно объяснить действием магнитной силы Лоренца на движущиеся носители тока.

СИЛА АМПЕРА



Опыт показывает, что на прямолинейный проводник с током в однородном магнитном поле действует сила, зависящая от силы тока, индукции магнитного поля, длины проводника и положения проводника относительно силовых линий магнитного поля. Вектор этой силы направлен перпендикулярно проводнику. Эта сила называется *силой Ампера*.

Если рассмотреть малый участок тонкого проводника длиной *dl*, по которому течёт ток силой *I*, то в магнитном поле с индукцией *B* на него будет действовать сила, вектор которой определяется соотношением:

$$\vec{F}_A = I\left(d\vec{l}\times\vec{B}\right).$$

Здесь, как и ранее, $d\vec{l}$ - это вектор, направленный по касательной к линии тока в положительном направлении для тока. Векторы $\left(d\vec{l},\vec{B},\vec{F}_A\right)$ образуют правую тройку векторов. Величина силы $F_A = IB\sin\alpha dl$, где α - угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Электрический ток представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц, а в магнитном поле на движущиеся заряженные частицы действует магнитная сила Лоренца. Найдем векторную сумму этих сил для малого тонкого проводника длиной *dl*.

Рассмотрим проводник, который покоится в некоторой системе отсчёта. Пусть площадь поперечного сечения проводника равна $S_\perp$. Предположим, что проводник тонкий, поэтому плотность тока вдоль поперечного сечения можно считать постоянным вектором $\vec{j} = qn < \vec{v} >$. Сила тока в проводнике $I = jS_\perp = qn < v > S_\perp$. На каждый носитель тока действует одинаковая магнитная сила Лоренца $\vec{F}_q = q\left(< \vec{v} > \times \vec{B}\right)$. Количестве носителей в объёме проводника длиной dl и площадью поперечного сечения $S_\perp$ равно $N = nS_\perp dl$. Поэтому вектор суммарной силы

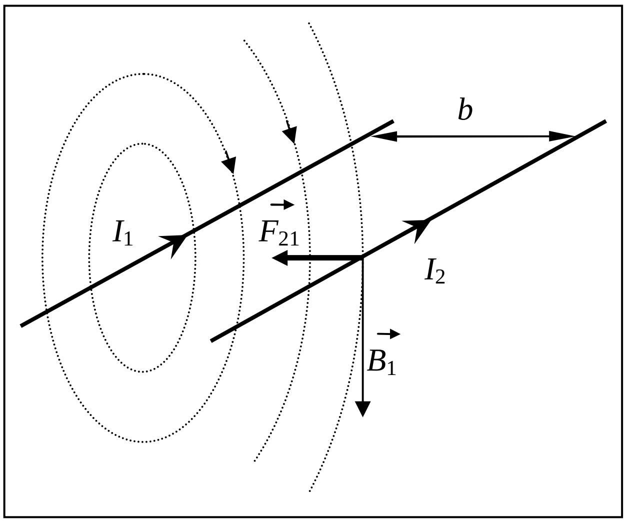
$$\vec{F}_\Sigma = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = N\vec{F}_q = nS_\perp dlq\left(< \vec{v} > \times \vec{B}\right) = qnS_\perp < v > \left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right).$$

Здесь был введён вектор $d\vec{l}$ такой, что выполняется равенство $< v > d\vec{l} =< \vec{v} > dl$.

Замечание. В металлическом проводнике носителями тока являются отрицательно заряженные электроны. Хоть электроны и движутся против положительного направления для тока, но вектор магнитной силы Лоренца, действующей на них, направлен так же, как если бы носители тока были положительно заряженными частицами.

Полученное выражение для суммарной силы совпадает с выражением для силы Ампера. Таким образом, можно сказать, что сила Ампера – это суммарная магнитная сила Лоренца, действующая на носители тока в *покоящемся* проводнике.

Пример. Найдем величину силы взаимодействия двух бесконечных параллельных прямых проводников с токами I_1 и I_2 (на единицу длины), расстояние между которыми равно b.



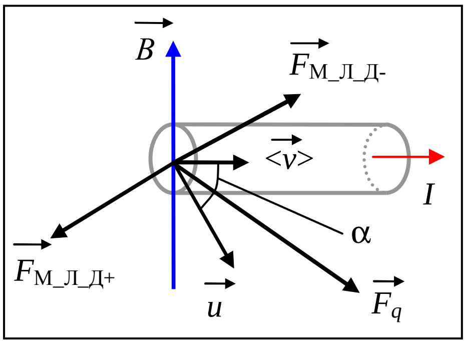
Решение. Каждый из проводников создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, силовые линии которого – окружности (в перпендикулярной плоскости) с центром на оси проводника. Рассмотрим проводник с током I_2. Он находится в магнитном поле проводника с током I_1, индукция которого на расстоянии b равна $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$. Вектор индукции $\vec{B}_1$ направлен перпендикулярно проводнику. Тогда на часть этого проводника длиной l действует сила Ампера, величина которой $F_{21} = I_2 l B_1 = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b} l$. Следовательно, величина силы взаимодействия (на единицу длины) $F_l = \frac{F_{21}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}$. Полученное выражение совпадает с *законом Ампера*, что говорит о верности проведённых рассуждений.

Замечание. Если токи направлены одинаково, то проводники притягиваются, а если противоположно, то отталкиваются.

Замечание. Так как электрический ток – это упорядоченное движение заряженных частиц, то можно утверждать, что в пучке частиц движущихся в одинаковом направлении будут действовать силы, стремящиеся сжать пучок.

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Рассмотрим (металлический) проводник, который *поступательно* движется с некоторой скоростью $\vec{u}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (предполагаем, что $u \ll c$). У каждого носителя тока есть дополнительная скорость упорядоченного движения вместе с проводником $\vec{u}$. Т.к. проводник в целом электрически нейтрален, то в нём присутствуют и положительные заряды,



покоящиеся относительно проводника, и которые тоже будут перемещаться со скоростью $\vec{u}$ вместе с проводником. Суммарный заряд этих положительных зарядов в объёме проводника равен по величине суммарному заряду электронов. Суммарная дополнительна плотность тока равна в этом случае нулю

$$\vec{j}_{ДОП} = q_+ n_+ \vec{u} + q_- n_- \vec{u} = Q_+ \vec{u} + Q_- \vec{u} = \vec{0}.$$

На свободные электроны, помимо силы $\vec{F}_q = q\left(<\vec{v}>\times\vec{B}\right)$, вызванной вектором средней скорости упорядоченного движения, будет действовать дополнительная магнитная сила Лоренца, вызванная вектором скорости $\vec{u}$ $\vec{F}_{М\_Л\_Д-} = -q\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)$.

Так как положительные заряды тоже перемещаются в магнитном поле (вместе с проводником), то появится дополнительная магнитная сила Лоренца $\vec{F}_{М\_Л\_Д+} = q\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)$.

Магнитные силы Лоренца, действующие на положительные и отрицательные заряды и вызванные дополнительной скоростью $\vec{u}$, компенсируют друг друга

$$\vec{F}_{М\_Л\_Д+} + \vec{F}_{М\_Л\_Д-} = \vec{0}.$$

Поэтому выражение для суммарной магнитной силы Лоренца, действующей на проводник с током, движущийся в магнитном поле, не изменится

$$\vec{F}_A = I\left(d\vec{l}\times\vec{B}\right).$$

Найдём работу этой силы на малом перемещении проводника $d\vec{r}$, считая силу тока постоянной

$$\delta A_A = \left(\vec{F}_A, d\vec{r}\right) = I\left(\left(d\vec{l}\times\vec{B}\right), d\vec{r}\right).$$

Пусть в декартовой системе координат $d\vec{l}=(dx,dy,dz)$ и $d\vec{r}=(dr_X,dr_Y,dr_Z)$, а $(\vec{e}_X,\vec{e}_Y,\vec{e}_Z)$ - орты, тогда, т.к

$$\left(d\vec{l}\times\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ dx & dy & dz\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix},$$

то

$$\left(\left(d\vec{l}\times\vec{B}\right),d\vec{r}\right)=\begin{vmatrix}dr_X & dr_Y & dr_Z\\ dx & dy & dz\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}B_X & B_Y & B_Z\\ dx & dy & dz\\ dr_X & dr_Y & dr_Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_X & B_Y & B_Z\\ dr_X & dr_Y & dr_Z\\ dx & dy & dz\end{vmatrix}=\left(\left(d\vec{r}\times d\vec{l}\right),\vec{B}\right).$$

(Сначала переставили первую и третью строки, а затем вторую и третью).

Т.е. работу силы Ампера можно записать в виде $\delta A_A=I\left(\left(d\vec{l}\times\vec{B}\right),d\vec{r}\right)=I\left(\left(d\vec{r}\times d\vec{l}\right),\vec{B}\right)$.

По определению векторного произведения векторов $\left(d\vec{r}\times d\vec{l}\right)=d\vec{S}$ - это вектор, перпендикулярный к векторам $d\vec{r}$ и $d\vec{l}$, а длина его равна площади параллелограмма, построенного на векторах $d\vec{r}$ и $d\vec{l}$. Поэтому $\left(\left(d\vec{r}\times d\vec{l}\right),\vec{B}\right)=\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=d\Phi_B$ - поток вектора магнитной индукции через эту малую площадку. Следовательно, работа $\delta A_A=I\cdot d\Phi_B$.

В общем случае, при *постоянной силе тока I*, можно записать выражение для работы силы Ампера

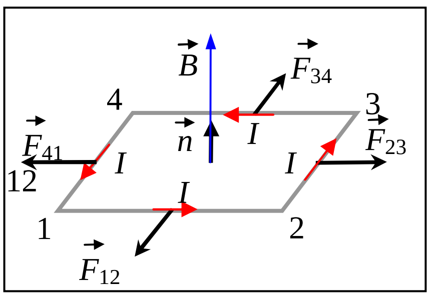
$$A_A=I\iint_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=I\cdot\Delta\Phi_B$$

где $\Delta\Phi_B=\iint_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ - магнитный поток через поверхность «заметаемую» проводником при его движении, при этом в каждый момент времени векторы $\left(d\vec{r},d\vec{l},d\vec{S}\right)$ образуют правую тройку.

Контур с током в магнитном поле

Рассмотрим прямоугольный (ориентированный) контур 12341 с постоянным током, находящийся в однородном магнитном поле. Направление нормали к контуру и направление тока в контуре согласованы правилом правого винта (буравчика). Пусть сила тока в контуре *I*, *B* – величина индукции магнитного поля, α - угол между нормалью к контуру и вектором $\vec{B}$. Пусть длина стороны 12 равна *a*, а стороны 23 – *b*.

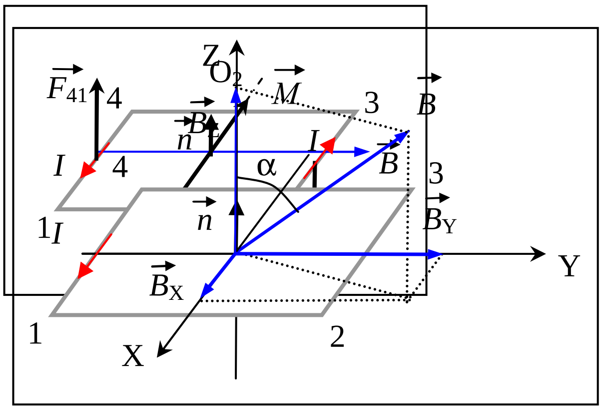
Рассмотрим несколько различных случаев.



1) Пусть угол α=0, т.е. векторы $\vec{B}$ и $\vec{n}$ сонаправлены.

На стороны прямоугольника действуют силы

$F_{12}=F_{34}=IBa$, $F_{23}=F_{41}=IBb$. Векторы всех сил лежат в одной плоскости и растягивают контур. Сумма сил равна нулевому вектору, и суммарный момент сил – тоже нулевой вектор. Если угол $\alpha=\pi$, то силы сжимают контур.



2) Пусть $\alpha=\pi/2$ и вектор $\vec{B}$ параллелен стороне 12. В этом случае $F_{12}=F_{34}=0$, $F_{23}=F_{41}=IBb$. Сумма сил равна нулевому вектору, но суммарный момент сил равен моменту пары сил (например, относительно оси O_1O_2)

$M_{O_1O_2}=F_{23}\cdot\frac{a}{2}+F_{41}\cdot\frac{a}{2}=IBba$. А вектор момента сил $\vec{M}$ лежит на оси O_1O_2 (т.к. векторы сил стремятся развернуть контур вокруг этой оси).

<u>Напоминание</u> – направление вектора момента силы вдоль оси согласовано с возможным направлением поворота под действием силы вокруг этой оси «правым винтом».

3) Рассмотрим случай, когда вектор $\vec{B}$ направлен произвольным образом. Введём декартову систему координат, начало которой поместим в центре прямоугольника, ось Z направлена вдоль нормали, а стороны параллельны осям X и Y.

Тогда в координатной записи $\vec{B}=\left(B_X,B_Y,B_Z\right)$.

Расписываем проекции моментов сил на оси

$M_X=IB_Yab$, $M_Y=-IB_Xab$, $M_Z=0$. Для этого контура вектор магнитного момента равен $\vec{p}_m=\vec{n}IS=\vec{n}Iab$, его координаты $\vec{p}_m=\left(0,0,Iab\right)$.

Утверждение. Момент сил, действующий на контур с током в магнитном поле равен

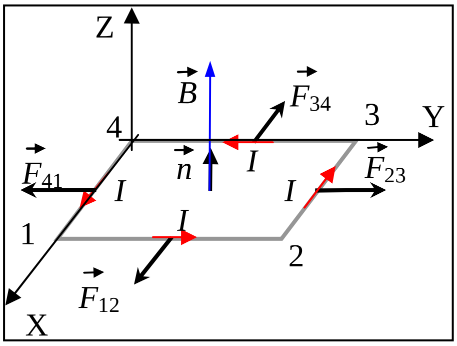
$$\vec{M}=\left(\vec{p}_m\times\vec{B}\right).$$

Доказательство. Это утверждение легко проверить во введённой декартовой системе координат. Действительно $\vec{M}=\left(\vec{p}_m\times\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ p_{mX} & p_{mY} & p_{mZ}\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ 0 & 0 & Iab\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=\vec{e}_X IB_Yab-\vec{e}_Y IabB_X$.♣

Следствие. Величина момента сил, действующих на контур с током в магнитном поле равна

$$M=p_mB\sin\alpha=ISB\sin\alpha.$$

Отсюда следует, что вектор момента силы равен нулю в двух случаях: при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$. Но положение равновесия при $\alpha=\pi$ является неустойчивым. Следовательно, момент сил стремится развернуть контур так, чтобы вектор магнитного момента был сонаправлен вектору индукции магнитного поля.



При повороте контура на малый угол (при постоянной силе тока) будет совершена работа $\delta A = Md\alpha = p_m B \sin\alpha d\alpha = -d\left(p_m B\cos\alpha\right) = -d\left(\vec{p}_m, \vec{B}\right)$. Это выражение позволяет ввести энергию взаимодействия контура с магнитным полем

$$W_m = \left(\vec{p}_m, \vec{B}\right).$$

Рассмотрим теперь малый контур в неоднородном магнитном поле. В этом случае суммарная сила, действующая на контур уже не равна нулю. Рассмотрим частный случай, когда контур находится в неоднородном поле в положении, при котором момент сил равен нулю.

Пусть это - прямоугольный контур, находящийся в плоскости XY. Предположим, что размеры контура dx и dy. В этом случае вектор магнитного момента контура направлен вдоль оси Z: $\vec{p}_m = \left(0,0,p_{mz}\right)$, $p_{mz} = Idxdy$. Векторное поле магнитной индукции направлено параллельно оси Z $\vec{B} = \left(0,0,B_z\right)$. Проекция силы на ось Y: $F_y = F_{23} - F_{41}$, где $F_{41} = Idx\left\langle B_z\right\rangle_{41}$, $F_{23} = Idx\left\langle B_z\right\rangle_{23}$. Т.к. для усреднённых значений индукции $\left\langle B_z\right\rangle_{23} \approx \left\langle B_z\right\rangle_{41} + \dfrac{\partial\left\langle B_z\right\rangle}{\partial y}dy$, то

$$F_y \approx Idx\left(\left\langle B_z\right\rangle_{41} + \frac{\partial\left\langle B_z\right\rangle}{\partial y}dy\right) - Idx\left\langle B_z\right\rangle_{41} \approx Idxdy\frac{\partial\left\langle B_z\right\rangle}{\partial y}.$$

При стягивании контура в точку ($dx\to0$, $dy\to0$), получаем $F_y = p_{mz}\dfrac{\partial B_z}{\partial y}$.

Аналогично $F_x = p_{mz}\dfrac{\partial B_z}{\partial x}$.