

# Линейная алгебра и функции нескольких переменных

## 2-й семестр, ИУ, РЛ, ПС, РТ (2022-23 уч.г.)

### Рубежный контроль 1

#### Вопросы для подготовки

#### *Базовые теоретические вопросы*

1. Дать определение линейного (векторного) пространства.
2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.
4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.
5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.
7. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
8. Записать неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника.
9. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.
10. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.
11. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.
12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.
14. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих разным собственным значениям.
15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.
16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.
17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих разным собственным значениям.
18. Сформулировать теорему о существовании ортонормированного базиса, в котором матрица заданного самосопряжённого оператора имеет простой вид.
19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.
20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.
21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.
23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и его следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.
24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

## *Теоретические вопросы повышенной сложности*

1. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
2. Доказать неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника.
3. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
4. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.
5. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих разным собственным значениям.
6. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

### *Задачи для подготовки базового уровня*

1. Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов  $\mathbf{a}_1 = (7, -6, 3)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, -9, 3)^T$ ,  $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 2)^T$ ,  $\mathbf{a}_4 = (1, 10, 5)^T$  пространства  $\mathbb{R}^3$ .
2. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 0)^T$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^4$  (скалярное произведение стандартное).
3. В  $\mathbb{R}^2$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  задана квадратичная форма  $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$ . Найти представление этой квадратичной формы в базисе  $\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2$ .
4. Базис  $\mathcal{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$  получается из правого ортонормированного базиса  $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  в  $V_3$  поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг вектора  $\mathbf{k}$ . Базис  $\mathcal{B}'' = (\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}'')$  получается из базиса  $\mathcal{B}'$  поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг вектора  $\mathbf{j}''$ . Найти матрицу перехода от базиса  $\mathcal{B}$  к базису  $\mathcal{B}''$ .
5. Линейный оператор  $A$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ .
6. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора  $A$ , заданного матрицей  $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$ .
7. Привести квадратичную форму  $9x^2 + 24xy + 16y^2$  к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Указать соответствующее преобразование и тип квадратичной формы (положительно определённая, отрицательно определённая, неопределённая).
8. Привести квадратичную форму  $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$  к каноническому виду методом Лагранжа. Указать соответствующее преобразование и тип квадратичной формы (положительно определённая, отрицательно определённая, неопределённая).

### *Задачи для подготовки повышенной сложности*

1. В линейном пространстве  $\mathcal{P}_3$  многочленов степени не выше 3 заданы базисы  $\mathcal{B} = (1, t - 1, (t - 1)^2, (t - 1)^3)$  и  $\mathcal{B}' = (1, t + 1, (t + 1)^2, (t + 1)^3)$ . Найти матрицу перехода от  $\mathcal{B}$  к  $\mathcal{B}'$ .
2. Квадратичную форму  $3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$  привести к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Указать соответствующее преобразование координат.

### Типовой вариант билета по теории

---

1. (1 балл) Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
2. (1 балл) Сформулировать теорему о существовании ортонормированного базиса, в котором матрица заданного самосопряженного оператора имеет простой вид.
3. (2 балла) Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

min: 2 балла, max: 4 балла

---

### Типовой вариант билета по задачам

---

1. (8 баллов) Вектор  $\mathbf{c}$  имеет координаты  $(1, -2)^T$  в базисе  $\mathbf{e}_1 = (3, 1)^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = (1, 1)^T$ . Найти его координаты в базисе  $\mathbf{e}'_1 = (3, 2)^T$ ,  $\mathbf{e}'_2 = (5, 4)^T$ .
2. (8 баллов) В  $\mathbb{R}^2$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  задана квадратичная форма  $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ . Найти представление этой квадратичной формы в базисе  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ .
3. (8 баллов) Найти матрицу линейного оператора  $A$  в стандартном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , если  $A$  переводит векторы  $\mathbf{a}_1 = (8, -5)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-3, 2)^T$  в векторы  $\mathbf{b}_1 = (-5, 4)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (7, -3)^T$ .
4. (8 баллов) С помощью критерия Сильвестра и его следствий проверить квадратичную форму  $-2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$  на знакоопределенность.
5. (8 баллов) Кривую 2-го порядка  $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$  привести к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.

min: 24 баллов, max: 40 баллов

---