

Подготовка к рубежному контролю №1
по курсу «Дискретная математика»
для специальности РТ5, 4-й семестр, 2023 г.

Теоретические вопросы
(3 балла)

1. Как определяются операции объединения, пересечения, разности, симметрической разности и дополнения множеств?
2. Что такое кортеж? Что называют декартовым произведением множеств? Перечислите свойства декартова произведения множеств.
3. Что называют отображением из множества A в множество B ? Какое отображение называют инъективным, сюръективным и биективным?
4. Что называют соответствием из множества A в множество B ? Как строится график и граф соответствия?
5. Что такое область определения и область значения соответствия? Что такое сечение соответствия по элементу x ? В каком случае соответствие называют функциональным по компоненте?
6. Что называют бинарным отношением на множестве? Что называют n -арным отношением на множестве? Что называют рефлексивно-транзитивным замыканием бинарного отношения на множестве?
7. Какое бинарное отношение на множестве называют рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным?
8. Какое бинарное отношение на множестве называют толерантностью и какое эквивалентностью?
9. Какое бинарное отношение на множестве называют порядком, предпорядком, линейным порядком и частичным порядком?
10. Как на упорядоченном множестве определяется строгий порядок, двойственный порядок и отношение доминирования?
11. Какой элемент множества называют наибольшим, наименьшим, максимальным и минимальным? Что такое точная верхняя грань и точная нижняя грань множества?
12. Что такое булева функция и булев куб? Как определяется булев порядок и лексикографический порядок на булевом кубе?
13. Что называют фиктивной переменной булевой функции? Какие булевы функции называют равными?
14. Как определяется композиция булевых функций? Определите понятие формулы над заданным множеством F булевых функций. Как определяется функция, представляемая формулой?

15. Что такое дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), конъюнктивная нормальная форма (КНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)?
16. Какая ДНФ называется минимальной и какая кратчайшей? В чём состоит задача минимизации булевых функций в классе ДНФ?
17. Что такое импликанта для заданной булевой функции, простая импликанта и ядровая импликанта?
18. Какая ДНФ называется сокращённой? Какие импликанты в сокращённой ДНФ называются избыточными? Какая ДНФ называется тупиковой?
19. Какое множество булевых функций называют базисом Жегалкина? Что такое полином Жегалкина? В чём заключается метод неопределённых коэффициентов построения полинома Жегалкина по таблице булевой функции?
20. Какая булева функция называется самодвойственной, какая монотонной и какая линейной?

Теоретические вопросы

(4 балла)

1. Перечислите свойства операций объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств.
2. Что называют характеристической функцией множества? В чём заключается метод характеристических функций доказательства теоретико-множественных тождеств? Напишите характеристические функции для пересечения, объединения, дополнения, разности и симметрической разности.
3. Как определяется композиция соответствий и обратное соответствие? Перечислите свойства композиции соответствий и обратного соответствия.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия рефлексивности, иррефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности бинарного отношения.
5. Что называют матрицей бинарного отношения? Сформулируйте теорему о матрице объединения, пересечения и композиции бинарных отношений, а также о матрице обратного отношения.
6. Сформулируйте теорему о том, как проверить рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность и транзитивность бинарного отношения по его матрице.
7. Что называют классом эквивалентности, фактор-множеством по заданному отношению эквивалентности и разбиением множества?
8. Сформулируйте определение индуктивного упорядоченного множества. Какое отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое называют непрерывным и какое монотонным?

9. Назовите основные этапы алгоритма Квайна–Мак-Клоски.
10. Перечислите классы Поста с описанием того, из каких функций состоит каждый класс. Что означает утверждение о том, что каждый класс Поста замкнут?

Теоретические вопросы (5 баллов)

1. В чём заключаются метод двух включений и метод эквивалентных преобразований доказательства теоретико-множественных тождеств? Докажите дистрибутивность пересечения относительно объединения методом двух включений.
2. Сформулируйте и докажите теорему о связи между отношением эквивалентности и разбиением множества.
3. Сформулируйте и докажите теорему о связи монотонности и непрерывности отображения одного индуктивного упорядоченного множества в другое.
4. Что называют неподвижной точкой отображения? Сформулируйте и докажите теорему о неподвижной точке отображения индуктивного упорядоченного множества в себя.
5. Сформулируйте и докажите теорему о представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ.
6. Сформулируйте и докажите утверждение о немонотонной булевой функции.
7. Сформулируйте и докажите утверждение о реализации констант 0 и 1 с помощью несамодвойственной булевой функции и отрицания.
8. Сформулируйте и докажите утверждение о реализации конъюнкции с помощью нелинейной булевой функции, констант и отрицания.
9. Сформулируйте и докажите утверждение о замкнутости классов Поста.
10. Сформулируйте и докажите критерий Поста о полноте множества булевых функций.

Задачи для подготовки

1. Метод двух включений (3 балла)

- 1.1. Методом двух включений докажите, что для любых бинарных отношений на множестве A справедливо тождество $(\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} = (\tau \circ (\sigma \circ \rho))^{-1}$.
- 1.2. Методом двух включений докажите, что для любых бинарных отношений на множестве A справедливо тождество $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \cap \rho_1^{-1}$.

2. Свойства бинарных отношений и операции над ними (3 балла)

- 2.1. Для заданного бинарного отношения ρ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ найдите ρ^2 , ρ^3 , ρ^{-1} и ρ^* .

$$\rho = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (5, 5)\}.$$

- 2.2. Для заданных бинарных отношений ρ и τ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ найдите отношение $(\rho \cup \tau) \circ \tau$ и изобразите его граф и график.

$$\rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\},$$

$$\tau = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2)\}.$$

- 2.3. Для заданного бинарного отношения ρ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ установите, является ли оно отношением толерантности, эквивалентности, предпорядка, порядка или строгого порядка. Для отношения эквивалентности укажите классы эквивалентности. Для отношения порядка выясните, является ли этот порядок линейным или частичным, а также укажите наименьший и наибольший элементы.

$$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$$

- 2.4. Для заданного бинарного отношения ρ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ установите, является ли оно отношением толерантности, эквивалентности, предпорядка, порядка или строгого порядка. Для отношения эквивалентности укажите фактормножество A/ρ . Для отношения порядка выясните, является ли этот порядок линейным или частичным, а также укажите минимальные и максимальные элементы.

$$\rho = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$

- 2.5. На множестве всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, определено бинарное отношение τ по следующему правилу: $f(x) \tau g(x)$, если и только если $\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |g(x)| dx$. Установите, является ли τ отношением толерантности, эквивалентности, предпорядка, порядка или строгого порядка. Для отношения эквивалентности укажите классы эквивалентности. Для отношения порядка выясните, является ли этот порядок линейным или частичным, а также укажите наименьший и минимальные элементы.

- 2.6. На множестве \mathbb{N}^2 определено бинарное отношение τ по следующему правилу: $(a, b) \tau (c, d)$, если и только если $a \leq c$ и $b \geq d$. Установите, является ли τ отношением толерантности, эквивалентности, предпорядка, порядка или строгого порядка. Для отношения эквивалентности укажите фактормножество A/τ . Для отношения порядка выясните, является ли этот порядок линейным или частичным, а также укажите минимальные и максимальные элементы.

3. Минимизация булевой функции (4 балла)

- 3.1. Минимизируйте функцию $f = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ с помощью карты Карно, укажите ядро и тупиковые ДНФ, кратчайшие и минимальные ДНФ.
- 3.2. Минимизируйте функцию $f = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$ с помощью карты Карно, укажите ядро и тупиковые ДНФ, кратчайшие и минимальные ДНФ.
- 3.3. Минимизируйте функцию $f = (1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$ с помощью карты Карно, укажите ядро и тупиковые ДНФ, кратчайшие и минимальные ДНФ.

4. Самодвойственность, монотонность и линейность булевых функций (4 балла)

- 4.1. Выясните, является ли функция $f = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ самодвойственной. Если нет, то с использованием этой функции и отрицания реализуйте константы 0 и 1, т. е. задайте их формулами над $\{f, \bar{}\}$.
- 4.2. Выясните, является ли функция $f = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ монотонной. Если нет, то укажите все соседние наборы, на которых нарушается монотонность, и с использованием этой функции и констант 0 и 1 реализуйте отрицание, т. е. задайте отрицание формулой над $\{f, 0, 1\}$.
- 4.3. Выясните, является ли функция $f = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$ линейной. Если нет, то с использованием этой функции, констант 0, 1 и отрицания реализуйте конъюнкцию, т. е. задайте её формулой над $\{f, 0, 1, \bar{}\}$.

5. Исследование полноты множества булевых функций (6 баллов)

- 5.1. Покажите, что множество булевых функций $F = \{\Rightarrow, f\}$, где $f = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$, является полным, и выразите конъюнкцию \wedge формулой над F .
- 5.2. Покажите, что множество булевых функций $F = \{f, g\}$, где $f = (0\ 1\ 0\ 1)$ и $g = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$, является полным, и выразите дизъюнкцию \vee формулой над F .

	Теория				Задачи					
№	1	2	3	min	4	5	6	7	8	min
Баллы	3	4	5	7	3	3	4	4	6	11

Билет 0

Теория

1. Как определяются операции объединения, пересечения, разности, симметрической разности и дополнения множеств?
2. Сформулируйте теорему о том, как проверить рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность и транзитивность бинарного отношения по его матрице.
3. Сформулируйте и докажите критерий Поста о полноте множества булевых функций.

Задачи

4. Методом двух включений докажите, что для любых бинарных отношений на множестве A справедливо тождество

$$(\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} = (\tau \circ (\sigma \circ \rho))^{-1}.$$

5. На множестве \mathbb{N}^2 определено бинарное отношение τ по следующему правилу: $(a, b) \tau (c, d)$, если и только если $a \leq c$ и $b \geq d$. Установите, является ли τ отношением толерантности, эквивалентности, предпорядка, порядка или строгого порядка. Для отношения эквивалентности укажите фактормножество A/τ . Для отношения порядка выясните, является ли этот порядок линейным или частичным, а также укажите минимальные и максимальные элементы.
6. Минимизируйте функцию $f = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ с помощью карты Карно, укажите ядро и тупиковые ДНФ, кратчайшие и минимальные ДНФ.
7. Выясните, является ли функция $f = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ монотонной. Если нет, то укажите все соседние наборы, на которых нарушается монотонность, и с использованием этой функции и констант 0 и 1 реализуйте отрицание, т. е. задайте отрицание формулой над $\{f, 0, 1\}$.
8. Покажите, что множество булевых функций $F = \{\Rightarrow, f\}$, где $f = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$, является полным, и выразите конъюнкцию \wedge формулой над F .