

**Аналитическая геометрия, 1-й семестр,
ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ (2022-23 уч.г.)**

**Рубежный контроль 1
Вопросы для подготовки**

Базовые теоретические вопросы

1. Дать определение равенства геометрических векторов.
2. Дать определения суммы векторов и произведения вектора на число.
3. Дать определения коллинеарных и компланарных векторов.
4. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
5. Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.
6. Дать определение базиса и координат вектора.
7. Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.
8. Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.
9. Дать определение скалярного произведения векторов.
10. Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.
11. Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.
12. Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.
13. Дать определение правой и левой тройки векторов.
14. Дать определение векторного произведения векторов.
15. Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.
16. Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.
17. Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.
18. Дать определение смешанного произведения векторов.
19. Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.
20. Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.
21. Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.
22. Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.
23. Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.
24. Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
25. Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
26. Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.
27. Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.
28. Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.
29. Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
30. Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Теоретические вопросы повышенной сложности

1. Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.
2. Доказать теорему о разложении вектора по базису.
3. Доказать свойство линейности скалярного произведения.
4. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.
5. Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.
6. Доказать свойство линейности смешанного произведения.
7. Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.
8. Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
9. Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
10. Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Задачи для подготовки базового уровня

1. Разложить вектор $\mathbf{c} = \{-7; 5\}$ по векторам $\mathbf{a} = \{3; -2\}$, $\mathbf{b} = \{4; -3\}$.
2. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $5 : 3$, точка M — середина \overline{AB} , а точка N делит сторону CD в отношении $2 : 3$. Разложить вектор \overline{MN} по векторам $\mathbf{a} = \overline{AD}$ и $\mathbf{b} = \overline{AB}$.
3. Даны точки $A(3; -1; 4)$ и $B(17; 6; -3)$. Найти точку C , которая делит отрезок AB в отношении $3 : 4$.
4. Найти объём тетраэдра, вершинами которого служат точки $A(-1; -1; 1)$, $B(1; -1; -1)$, $C(-1; 1; -1)$, $D(1; 1; 1)$.
5. Вершинами треугольника служат точки $A(-2; 1; 1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(1; 1; -2)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .
6. Найти расстояние от точки $M(7; 7; 7)$ до плоскости $2x + 2y + z = 2$.
7. Для прямой $2x - 3y + z - 2 = 0$, $-4x + y + 3z + 4 = 0$ найти параметрические уравнения.
8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{7}$ перпендикулярно плоскости $x + y + z = 0$.
9. Найти расстояние от точки $M(4; -2; 1)$ до прямой $x = -2$, $y = -2 + 4t$, $z = -2 - 3t$.
10. Составить канонические уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$ параллельно оси OX .

Задачи для подготовки повышенной сложности

1. Найти угол между векторами $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} равен $2\pi/3$.
2. Точки $A(-2; -2; 10)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 11)$ служат вершинами треугольной пирамиды. Найти высоту пирамиды, опущенную из вершины D на грань ABC .
3. Составить канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым $x = 2 + 2t$, $y = 4 + 3t$, $z = -2 - 2t$ и $x = 2 - 3t$, $y = t$, $z = -4 + 3t$.
4. Найти точку Q , симметричную точке $P(3; 18; 18)$ относительно прямой $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{2}$.
5. Составить канонические уравнения прямой, симметричной прямой $x = -1$, $y = -1$, $z = t$ относительно плоскости $x + y + z = 1$.

Типовой вариант билета по теории

1. (1 балл) Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
2. (1 балл) Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
3. (1 балл) Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.
4. (2 балла) Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

min: 3 балла, max: 5 баллов

Типовой вариант билета по задачам

1. (4 балла) Выяснить, образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = \{3; -2; 5\}$, $\mathbf{b} = \{-9; 14; -21\}$, $\mathbf{c} = \{3; 2; 2\}$.
2. (4 балла) Найти площадь треугольника, вершины которого — точки $A(-7; -7; -7)$, $B(13; 0; -6)$, $C(-3; -6; -7)$.
3. (4 балла) Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 2; 1)$ параллельно плоскости $2x - 4y + 5z + 3 = 0$.
4. (4 балла) Найти проекцию Q точки $P(-5; 5; 5)$ на плоскость $3x - 2y - 2z + 18 = 0$.
5. (4 балла) Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.
6. (6 баллов) Треугольная пирамида с вершинами $A(-7; -3; -3)$, $B(-5; -1; 0)$, $C(-5; 0; -1)$ имеет объём 8, о вершине D известно, что она лежит на положительной части оси OX . Найти координаты вершины D .
7. (6 баллов) Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(0; 1; 1)$ и пересекает прямые

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 8 + 2t, \\ z = 8 + 2t. \end{cases}$$

min: 19 баллов, max: 32 баллов