ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Преобразование Лапласа и формула обращения

1.1. *Интеграл Фурье*

Пусть в промежутке $(-l,l)$ функция $f(t)$ удовлетворяет ***условиям Дирихле***, а именно:

а) ограничена на этом отрезке;

б) кусочно-непрерывна на нем (имеет конечное число точек разрыва первого рода);

в) кусочно-монотонная (в частности, имеет лишь конечное число экстремумов).

Тогда, как известно из теории тригонометрических рядов, функция может быть на этом отрезке представлена сходящимся к ней тригонометрическим рядом

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nt}{l}+b_n\sin\frac{\pi nt}{l}\right). \tag{1.1}$$

По теореме Дирихле:

1) в точках непрерывности сумма ряда равна значению функции;
2) в точках разрыва сумма ряда равна $\frac{f(t_1-0)+f(t_1+0)}{2}$, а на концах промежутка $(-l,l)$, то есть при $t=-l$ и $t=+l$ равна $\frac{f(-l+0)+f(l+0)}{2}$.

Коэффициенты ряда (1.1) определяются по формулам Эйлера-Фурье:

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau\\
a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{\pi n\tau}{l}d\tau\\
b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sin\frac{\pi n\tau}{l}d\tau
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Так как косинус есть функция четная, а синус – функция нечетная, то $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = -b_n$ $(n = 0,1,2,...)$, формулу (1.1) можно записать в виде $f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n t}{l}\right)$ или, с учетом формул (1.2),

$$f(t) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{l} f(\tau)\left(\cos\frac{\pi n t}{l}\cdot\cos\frac{\pi n \tau}{l} + \sin\frac{\pi n t}{l}\cdot\sin\frac{\pi n \tau}{l}\right)d\tau ,$$

откуда

$$f(t) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{l} f(\tau)\cos\frac{\pi n(t-\tau)}{l}\,d\tau . \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l},\ \Delta\omega_n = \frac{\pi n}{l} - \frac{\pi(n-1)}{l} = \frac{\pi}{l} \quad \text{и} \quad F(\omega_n) = \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\left[\omega_n(t-\tau)\right]d\tau , \tag{1.4}$$

приведем формулу (1.3) к виду:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega_n)\Delta\omega_n . \tag{1.5}$$

Если в промежутке $(-\infty,+\infty)$ функция $f(t)$ абсолютно интегрируема, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt = Q , \tag{1.6}$$

где Q - конечное число, то переходя в равенстве (1.5) к пределу при $t \to \infty$ и замечая, что $\lim\limits_{l\to\infty}\Delta\omega_n \to 0$, получаем формулу: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$, или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau . \tag{1.7}$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (1.7), называется ***интегралом Фурье***.

Замечая, далее, что

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau \tag{1.8}$$

(т.к. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau$ - является нечетной функцией аргумента ω) преобразуем формулу (1.7)

$$f(t)+0i=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left\{\cos\left[\omega(t-\tau)\right]+i\sin\left[\omega(t-\tau)\right]\right\}d\tau ,$$

откуда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{\omega(t-\tau)i}d\tau . \qquad (1.9)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (1.9), называется ***интегралом Фурье в комплексной форме.***

1.2. *Преобразование Лапласа и формула обращения*

Докажем теперь, что если функция $f(t)$ не интегрируема абсолютно, удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} \left|f(t)\right| < Me^{c_0 t} \quad &\text{при } t>0 \\ f(t)=0 \quad &\text{при } t<0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1.10)$$

Где M и c_0 - некоторые постоянные положительные числа, то при

$$c \ge c_1 > c_0 \qquad (11.10а)$$

функцию

$$\varphi(t)=e^{-ct}\cdot f(t) \qquad (1.10б)$$

можно представить интегралом Фурье:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\tau)e^{\omega(t-\tau)i}d\tau . \qquad (1.10в)$$

В самом деле, если условия (1.10) и (1.10а) выполняются, то

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left|\varphi(t)\right|dt=\int\limits_{0}^{\infty}\left|e^{-ct}f(t)\right|dt=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-ct}\left|f(t)\right|dt<\int\limits_{0}^{\infty}e^{-ct}\cdot Me^{c_0 t}dt=$$

$$=M\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(c-c_0)t}dt=\frac{M}{-(c-c_0)}e^{-(c-c_0)t}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{M}{c-c_0}<\frac{M}{c_1-c_0}.$$

Таким образом, в интервале $(0,+\infty)$ функция $\varphi(t)$ оказывается абсолютно интегрируемой, что и доказывает возможность представления ее в этом интервале интегралом Фурье (1.10в).

Заменяя $\varphi(t)$ в равенстве (1.10в) на $e^{-ct}f(t)$ (формула (1.10б)):

$$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-c\tau}\cdot e^{\omega(t-\tau)i}d\tau$$

и умножая обе части этого равенства на e^{ct}, получим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\; e^{(c+\omega i)t}\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-(c+\omega i)\tau}d\tau\,,$$

обозначим

$$p=c+\omega i \quad dp=id\omega\,. \tag{1.11}$$

Так как $p=c-i\infty$ при $\omega\to-\infty$; $p=c+i\infty$ при $\omega\to+\infty$, то последняя формула для $f(t)$ принимает вид:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{(c+\omega i)t}dp\int_{0}^{\infty}e^{-p\tau}f(\tau)d\tau\,, \tag{1.12}$$

это преобразованный интеграл Фурье.

Если положить:

$$F(p)=\int_{0}^{\infty}e^{-pt}f(t)dt\,, \tag{1.13}$$

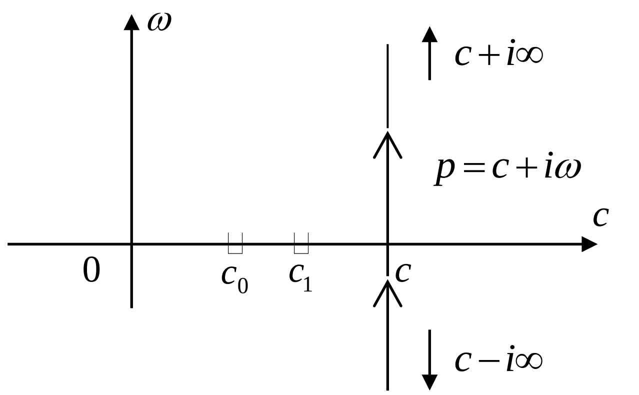
то

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{pt}F(p)dp\,. \tag{1.14}$$

В операционном исчислении формула (1.13) является основной. Формула эта, в правой части которой стоит так называемый интеграл Лапласа, определяет ***преобразование Лапласа,*** при помощи которого функция $f(t)$ вещественного независимого переменного t преобразуется в функцию $F(p)$ комплексного независимого переменного p.

Функцию $f(t)$ называют ***начальной функцией или оригиналом***, а функцию $F(p)$, получаемую из $f(t)$ при помощи преобразования Лапласа, ***изображением*** функции $f(t)$.

Легко доказать, что, если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и условиям (1.10), то изображение $F(p)$ представляет собой функцию, регулярную при всех значениях комплексного независимого переменного $p = c + \omega t$, удовлетворяющих неравенствам (1.10а), то есть регулярную по всей полуплоскости, расположенной справа от прямой $\operatorname{Re} p = c_0$.



Формула (1.14), в правой части которой стоит так называемый ***интеграл обращения***, определяет преобразование обратное преобразованию Лапласа, то есть преобразование, при помощи которого функция $F(p)$ комплексного переменного p преобразуется в функцию $f(t)$ вещественного независимого переменного t.

2. Основные теоремы и формулы операционного исчисления

2.1. *Оригинал и изображение*

В качестве исходной формулы для дальнейших выводов возьмем формулу

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \tag{2.1}$$

определяющую преобразование Лапласа.

Функция $f(t)$ вещественного независимого переменного t, стоящая в формуле (2.1) под знаком интеграла Лапласа, называется начальной функцией или ***оригиналом*** ; функция $F(p)$ комплексного независимого переменного p называется изображением функции $f(t)$.

Формула (2.1), связывающая изображение с оригиналом, часто заменяется символической формулой:

$$F(p) \longrightarrow f(t), \quad (F(p) = f(t)),$$

понимаемой в том смысле, что функция $f(t)$ является оригиналом для функции $F(p)$, или формулой

$$f(t) \longleftarrow F(p), \quad (f(t) = F(p)),$$

показывающей, что функция $F(p)$ является изображением.

Стрелка в этих символических формулах своим острием всегда должна быть направлена к оригиналу.

Иногда для изображения связи между оригиналом и изображением пользуются символическими формулами

$$F(p) \fallingdotseq f(t) \text{ и}$$

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Изображения имеют только те функции, для которых имеет смысл интеграл Лапласа (2.1).

Примером функции, не имеющей изображения, может служить функция $f(t)=\frac{1}{t}$. Точно так же не всякая функция комплексного переменного может рассматриваться как изображение некоторой функции вещественного переменного. Например, не имеет оригинала функция $F(p)=tgp$, так как полюсы этой функции распределяются по всей вещественной оси. То есть на плоскости (p) нет ни одной прямой, параллельной мнимой оси, справа от которой эта функция была бы регулярной.

Мы будем рассматривать только такие начальные функции $f(t)$, которые удовлетворяют трем условиям:

1) $f(t)=0$ при $t<0$,

2) $|f(t)|<Me^{c_0 t}$ при $t>0$,

где M и c_0 - некоторые положительные постоянные числа,

3) на любом конечном отрезке $[0,T]$ для функции $f(t)$ выполняются условия Дирихле.

Кроме того, всегда будем считать, что в формуле (1)

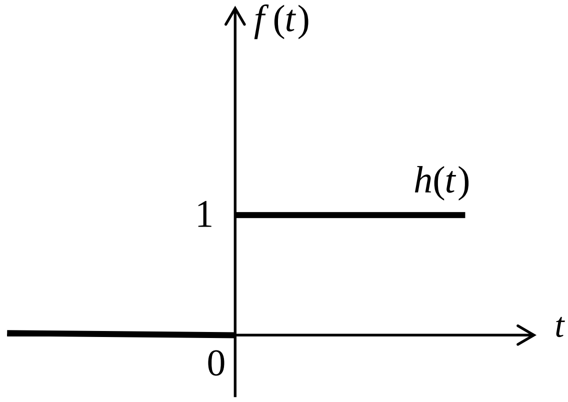
$$\operatorname{Re} p = C_0 \geq c_1 > c_0;$$

при этих условиях интеграл Лапласа, определяющий функцию $F(p)$, будет сходиться (и притом равномерно), во всей полуплоскости, ограниченной прямой $\operatorname{Re} p = C_0$. Функции, удовлетворяющие всем этим условиям, называются «изображенными по Лапласу».

Единичная функция

Важную роль в операционном исчислении играет функция, равная нулю при $t<0$ и равная единице при $t>0$; эта функция называется ***единичной функцией*** и обозначается $h(t)$:

$$h(t)=\begin{cases}0 \text{ при } & t<0 \\ 1 \text{ при } & t>0\end{cases}.$$



Изображение $H(p)$ единичной функции $h(t)$ легко определяется по формуле (2.1):

$$H(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-pt}dt=\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{p},$$

Следовательно, $H(p)=\dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p>0$, то есть

$$h(t) \fallingdotseq \frac{1}{p}.$$

Основные свойства изображений

Отметим простейшие свойства изображений.

1) Умножение начальной функции (оригинала) на постоянную величину влечет за собой умножение на ту же постоянную изображения:

$$c\cdot f(t)\fallingdotseq c\cdot F(p), \text{ если } f(t) \fallingdotseq F(p) \text{ и}$$

$$f(t)=2 \fallingdotseq F(p)=\frac{2}{p}, \text{ т.к. } c=2,\ 1\fallingdotseq\frac{1}{p};\ c=const.$$

2) Изображение алгебраической суммы конечного числа начальных функций равно алгебраической сумме изображений этих функций:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\fallingdotseq\sum_{k=1}^{n}F_k(p), \text{ где}$$

$$f_k(t) \risingdotseq F_k(p), \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

3) Изображение любой линейной комбинации начальных функций равно той же линейной комбинации изображений этих функций:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p), \text{ где}$$

$$f_k(t) \risingdotseq F_k(p) \text{ и } c_k = const, \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Доказательство этих свойств основано на применении простейших теорем об определенном интеграле.

Отметим, что при использовании операционного исчисления в практических целях обычно обращаются к так называемым каталогам, содержащим некоторое число начальных функций и их изображений, определенных заранее путем непосредственного вычисления интеграла Лапласа или при помощи соответствующих теорем и формул (вывод некоторых из них будет дан ниже). Ясно, что такие каталоги могут быть использованы и для практического решения обратной задачи, состоящей в определении начальной функции по данному изображению этой функции.

2.2. Дифференцирование и интегрирование начальной функции (оригинала) и изображения

В дальнейшем при формулировке и доказательстве теорем операционного исчисления мы всегда будем считать, что все рассматриваемые начальные функции:

1) изображаемы по Лапласу;
2) нужное число раз дифференцируемы;
3) имеют производные, также изображаемы по Лапласу.

Оригинал будем обозначать малыми буквами, а изображения – соответствующими большими буквами (например, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и т.д.).

2.2.1. Дифференцирование оригинала

Допустим, что оригинал $f(t)$ дифференцируемая функция и его производная $f'(t)$ также является оригиналом, причем

$$|f(t)| < Me^{c_0 t}, \ |f'(t)| < M_1 e^{c_0' t} \text{ при } t > 0.$$

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $f'(t) \risingdotseq F_1(p)$. Найдем связь между $F(p)$ и $F_1(p)$. По определению изображения имеем

$$F_1(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt.$$

Выберем здесь p так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\mathrm{Re}(p) > c_0$, $\mathrm{Re}(p) > c_0'$. Выполняя в правой части интегрирование по частям, причем $u = e^{-pt}$, $dv = f'(t)dt$, находим

$$F_1(p) = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -f(0) + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -f(0) + pF(p).$$

Таким образом, мы получили следующий результат: из соотношения $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует соотношение

$$f'(t) = pF(p) - f(0). \qquad (2.2)$$

Предполагая, что оригинал $f(t)$ дифференцируем n раз и что $f^{(n)}(t)$ также является оригиналом, методом индукции из формулы (2.2) получим следующий результат:

Из соотношения $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует соотношение

$$f^{(n)}(p) \risingdotseq p^n F(p) - \left\{ p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0) \right\}. \qquad (2.3)$$

Например, зная, что $f(t) = \sin t \risingdotseq F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$, имеем

$$f'(t) = \cos t \risingdotseq pF(p) = \frac{p}{p^2+1}; \quad f(0) = 0.$$

2.2.2. Интегрирование оригинала

Примем без доказательства, что если $f(t)$ - оригинал, то оригиналом будет служить и $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$.

Найдем теперь изображение $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$.

Так как $f(t)=\varphi'(t)$, то полагая $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$, по формуле (2.2) находим связь между $\Phi(p)$ и $F(p)$:

$$F(p)=p\Phi(p)-\varphi(0)=p\Phi(p)\ \ (\varphi(0)=0),$$

отсюда $\Phi(p)=\dfrac{1}{p}F(p)$. Мы пришли к следующему результату:

Из соотношения $f(t)\ \risingdotseq F(p)$ следует

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\ \risingdotseq\ \frac{1}{p}F(p). \tag{2.4}$$

Например:

$$f(t)=cht\ \risingdotseq\ F(p)=\frac{p}{p^2-1},$$

$$sht=\int\limits_0^t ch\tau d\tau\risingdotseq\ \frac{1}{p}\left(\frac{p}{p^2-1}\right)=\frac{1}{p^2-1},\ sh(0)=0.$$

Т.е. $sht\risingdotseq\dfrac{1}{p^2-1}$.

2.2.3. Дифференцирование изображения

В теории функций комплексного переменного доказывается, что несобственный интеграл

$$\varphi(z)=\int_a^\infty f(z,t)dt,$$

в котором $f(z,t)$ - есть регулярная функция комплексного переменного z в замкнутой области D и непрерывная функция вещественного переменного t

при всяком $t \geq a$, можно дифференцировать под знаком интеграла: $\varphi'(z) = \int_a^\infty \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} dt$, если интеграл этот сходится равномерно относительно z, причем теорема остается верной и для несобственного интеграла, в котором подинтегральная функция $f(z,t)$ становится неограниченной.

Говоря о свойствах изображения, было установлено, что изображение является регулярной функцией комплексного переменного p в полуплоскости $\mathrm{Re} > c > c_1 > c_0$ и что в этой полуплоскости дифференцирование изображения можно выполнять под знаком интеграла Лапласа. Поэтому из равенства $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ следует

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \int_0^\infty e^{-st} (-t)^n f(t) dt .$$

Но в правой части стоит изображение функции $(-1)^n t^n f(t)$, которая является оригиналом, если оригиналом будет $f(t)$. Таким образом, из соотношения $f(t) \fallingdotseq F(p)$ следует

$$(-1)^n t^n f(t) \fallingdotseq \frac{d^n F(p)}{dp^n} . \qquad (2.5)$$

Например,

$$1 \fallingdotseq \frac{1}{p},$$

$$-t \fallingdotseq \left(\frac{1}{p} \right)' = -\frac{1}{p^2},$$

т.е.

$$t \fallingdotseq \frac{1}{p^2} .$$

2.2.4. Интегрирование изображения

Если функция $\frac{f(t)}{t}$ является изображаемой по Лапласу, то имеет место соотношение:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt\,.$$

Заменяя $\frac{e^{-pt}}{t}$ интегралом $\int_p^{\infty} e^{-qt}dq$, получим:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_0^{\infty}\left\{f(t)\int_p^{\infty} e^{-qt}dq\right\}dt$$

или, если в правой части изменить порядок интегрирования,

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty}\left\{f(t)\int_0^{\infty} e^{-qt}dq\right\}dt$$

или

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(q)dq\,,$$

где

$$F(p)=\int_p^{\infty} e^{-pt}f(t)dt \fallingdotseq f(t)\,.$$

Таким образом, если $F(p) \fallingdotseq f(t)$ и функция $\frac{f(t)}{t}$ изображаема по Лапласу, то

$$\int_p^{\infty} F(q)dq \quad \fallingdotseq \quad \frac{f(t)}{t}\,. \tag{2.6}$$

Пример:

$$f(t)=\sin t \;\; f(t)\risingdotseq \frac{1}{p^2+1}=F(p)\,,$$

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{2}\frac{dq}{q^2+1}=\arg tg\, q\Big|_p^{\infty}=\frac{\Pi}{2}-\arg tg\, p\,.$$

$$f(t)=\frac{\sin t}{t} \risingdotseq F(p)=\frac{\Pi}{2}-\arg tg\, p\,.$$

3. Основные теоремы операционного исчисления

3.1. Теорема подобия

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$ и $a = const > 0$, то

$$f(x) \risingdotseq F\left(\frac{p}{a}\right). \qquad (3.1.)$$

Доказательство. $f(at) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f(at)dt$.

Пусть $at = t_1, \Rightarrow t = \frac{t_1}{a}$, а $adt = dt_1, \Rightarrow dt = \frac{1}{a}dt_1$, тогда $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}t_1} f(t)dt_1$,

или

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Из формулы (3.1) понятно, что увеличению независимой переменной оригинала в a раз, соответствует уменьшение в a раз независимой переменной изображения и уменьшение в a раз самого изображения.

3.2. Теорема запаздывания

Вспомним понятие единичной функции.

Единичной функцией называется функция, определяемая следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} h(t) = 1 \text{ при } t > 0 \\ h(t) = 0 \text{ при } t < 0 \end{array}\right\}.$$

Функцию, $h(t-\tau)$ где τ - положительная постоянная, называют единичной функцией запаздывающего аргумента и означают:

$$\left.\begin{array}{l} h(t-\tau) = 1 \text{ при } t > \tau \\ h(t-\tau) = 0 \text{ при } t < \tau \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

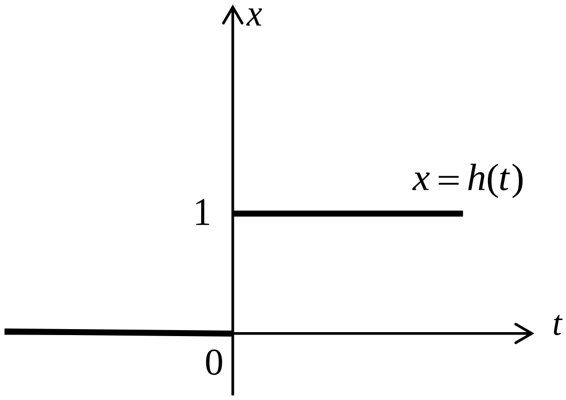


Рис. 3.1.

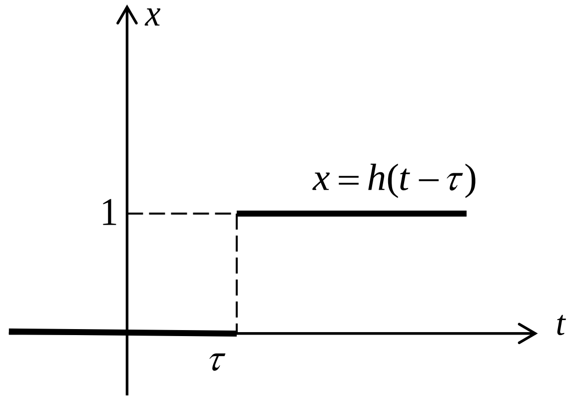


Рис. 3.2.

Очевидно, что если под t подразумевать время, то функция $f_\tau(t)$ определит течение того же процесса, что и функция $f(t)$, но происходящего с запаздыванием на время τ.

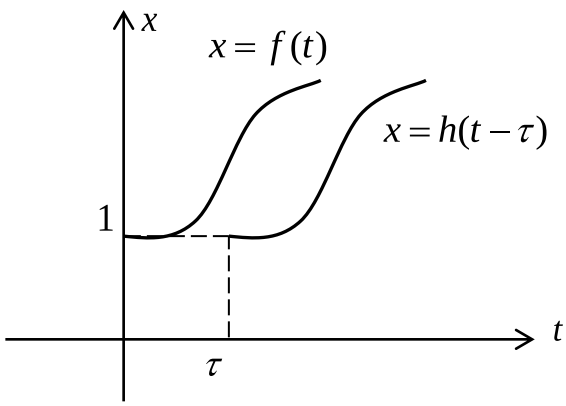


Рис. 3.3.

Функция $f_\tau(t)$ может быть представлена в виде произведения запаздывающей единичной функции $h(t-\tau)$ на данную функцию $f(t)$ при замене в последней t через $t-\tau$:

$$f_\tau(t) = h(t-\tau)\cdot f(t-\tau).$$

Зная изображение $F(p)$ функции $f(t)$, можно найти изображение $F_\tau(p)$ функции $f_\tau(t)=h(t-\tau)\cdot f(t-\tau)$, пользуясь формулой $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$.

Имеем

$$F_\tau(p)=\int_0^\infty e^{-pt}h(t-\tau)\cdot f(t-\tau)dt=$$

$$=\int_0^\tau e^{-pt}\underbrace{h(t-\tau)}_{0}\cdot f(t-\tau)dt+\int_\tau^\infty e^{-pt}\underbrace{h(t-\tau)}_{1}\cdot f(t-\tau)dt.$$

$$F_\tau(p)=\int_\tau^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt.$$

Применяя подстановку $t-\tau=t_1,\ \ dt=dt_1$, при которой, если $t=\tau$, то $t_1=0$; если $t=\infty$, то $t_1=\infty$, имеем

$$F_\tau(p)=\int_0^\infty e^{-p(t_1+\tau)}f(t_1)dt_1=e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pt_1}f(t_1)dt_1=e^{-p\tau}\cdot F(p).$$

Таким образом:

$$F_\tau(p)=e^{-p\tau}\cdot F(p)$$

то есть

$$e^{-pt}\cdot F(p)\risingdotseq\begin{cases}0 & при \quad t<\tau\\ f(t-\tau) & при \quad t>\tau\end{cases}$$

Или, зная $f(t)\fallingdotseq F(p)$, найдем

$$h(t-\tau)f(t-\tau)\fallingdotseq e^{-p\tau}\cdot F(p) \tag{3.3}$$

3.3. Теорема смещения

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то при любом вещественном или комплексном α оригиналом будет являться и функция $e^{\alpha t}f(t)$, так как из оценки

$$|f(t)|<Me^{c_0 t}$$

вытекает

$$\left|e^{\alpha t} f(t)\right| < Me^{[c_0+\mathrm{Re}(\alpha)]t}$$

при $t > 0$.

Найдем изображение этой функции

$$e^{\alpha t} f(t) \fallingdotseq \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} f(t) dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства отличается от интеграла Лапласа, определяющего изображения $F(p) \risingdotseq f(t)$ лишь тем, что в последнем аргумент изображения p заменен на $(p-\alpha)$.

Таким образом, если

$$f(t) \fallingdotseq F(p), \text{ то}$$

$$e^{\alpha t} \cdot f(t) \fallingdotseq F(p-\alpha).$$

4. Изображения основных элементарных функций

Зная изображение единичной функции $h(t) \fallingdotseq \dfrac{1}{p}$ или $1 \fallingdotseq \dfrac{1}{p}$, получим (опуская множитель $h(t)$)

$$e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{p-a}. \tag{4.1}$$

По формуле, выражающей теорему о дифференцировании изображения,

$$(-1)^n t^n \fallingdotseq \frac{d^n F(p)}{dp^n} = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}},$$

откуда

$$t^n \fallingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \text{или} \quad \frac{t^n}{n!} \fallingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}, \quad t \fallingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \fallingdotseq \frac{2!}{p^3} \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Применяя теорему смещения к функции $f(t) = \dfrac{t^n}{n!}$, получим

$$f(t) = \frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}} = F(p-\alpha). \tag{4.2}$$

Например,

$$f(t)=\frac{t^2}{2!}e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{(p-3)^3}=F(p-3).$$

Формула (4.1) позволяет найти изображение функций $\cos\beta t,\ \sin\beta t,\ ch\beta t,\ sh\beta t$, если эти функции преобразовать при помощи формул Эйлера:

$$\cos\beta t=\frac{e^{\beta ti}+e^{-\beta ti}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\beta i}+\frac{1}{p+\beta i}\right],$$

откуда

$$\cos\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2} \tag{4.3}$$

и, в частности, при $\beta=1$ $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$.

Аналогично,

$$\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}, \tag{4.4}$$

при $\beta=1$ $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$.

$$ch\beta t=\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\beta}+\frac{1}{p+\beta}\right],$$

откуда

$$ch\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\beta^2}, \tag{4.5}$$

при $\beta=1$ $cht \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}$,

$$sh\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2-\beta^2}, \tag{4.6}$$

при $\beta=1$ $sht \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}$.

При помощи теоремы смещения получается следующая группа формул:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}, \tag{4.3}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}, \tag{4.4}$$

$$e^{\alpha t}\, ch\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}, \tag{4.5}$$

$$e^{\alpha t}\, sh\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2} \tag{4.6}$$

и т.д.

Теорема 4. *Теорема свертывания.* Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $f(t)$, определяемая формулой

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau.$$

(Операция получения свертки, называется свертыванием двух функций).

Если в интеграле заменить $t-\tau=\theta;\ d\tau=-d\theta$, причем, если $\tau=0$, то $\theta=t$, если $\tau=t$, то $\theta=0$, тогда формула примет вид:

$$f(t)=-\int_t^0 f_1(t-\theta)\cdot f_2(\theta)d\theta=\int_0^t f_1(t-\theta)\cdot f_2(\theta)d\theta$$

или

$$f(t)=\int_0^t f_1(t)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau,$$

т.е. функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, входящие в свертку, равноправны.

Поставим теперь задачу выразить изображение $F(p)$ свертки $f(t)$ через изображения $F_1(p)$ и $F_2(p)$ свертываемых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Докажем теорему:

если $f_1(t)\risingdotseq F_1(p)$, а $f_2(t)\risingdotseq F_2(p)$, то $F_1(p)\cdot F_2(p)\fallingdotseq\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$, или

$$f(t)\risingdotseq F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Доказательство.

Применим к функции $f(t)$ основную формулу для нахождения изображения:

$$F(p) = \int_0^\infty \left[e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

Причем областью интегрирования является часть первого координатного угла, ограниченная прямыми $\tau = 0$ и $\tau = 1$ (рис. 4.1).

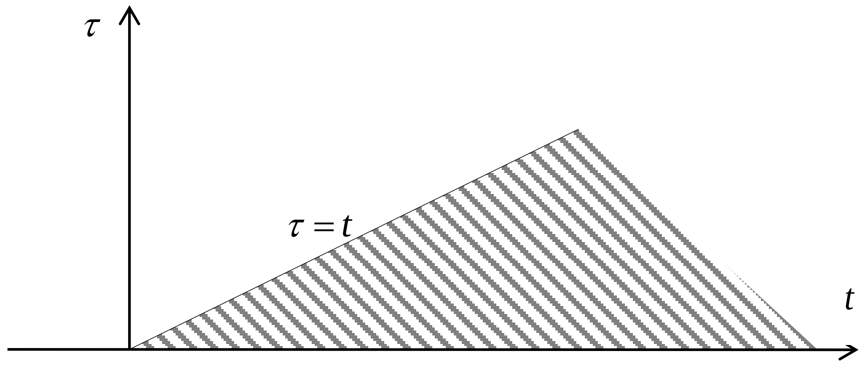


Рис. 4.1.

Изменим порядок интегрирования

$$F(p) = \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot \left[\int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right] d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot \left[\int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-p(t-\tau)} d(t-\tau) \right] e^{-p\tau} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau \cdot \left[\int_\tau^\infty f_2 (\underbrace{t-\tau}_{\theta}) e^{-p(t-\tau)} d(t-\tau) \right] =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-p\theta} f_2(\theta) d\theta =$$

$$= F_1(p) \cdot F_2(p),$$

т.к.

$$F_1(p) = \int_0^\infty f_1(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau,$$

$$F_2(p) = \int_0^\infty e^{-p\theta} f_2(\theta) d\theta = \int_0^\infty e^{-pt} f_2(t) dt.$$

Таким образом

$$F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p) \text{ или}$$

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p)=F(p).$$

Доказали, что ***изображение свертки двух функций равно произведению их изображений.***

Пример. Найти оригинал $f(t)$, зная его изображение: $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Обозначим:

$$f_1(t)=e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}=F_1(p) \text{ и}$$

$$f_2(t)=\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}=F_2(p),$$

По теореме умножения функций

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \fallingdotseq f(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau.$$

$$f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\cdot\sin\tau d\tau=-\int_0^t e^{t-\tau}d\cos\tau=\left[-e^{t-\tau}\cos\tau-\int \cos\tau e^{t-\tau}d\tau\right]_0^t=$$

$$=-\cos t+e^t-\int_0^t e^{t-\tau}d\sin\tau=-\cos t+e^t-\left[e^{t-\tau}\sin\tau\Big|_0^t+\int_0^t \sin\tau e^{t-\tau}d\tau\right]=$$

$$=-\cos t+e^t-0-\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$$

Итак:

$$f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\cdot\sin\tau d\tau=\frac{1}{2}\left(e^t-\cos t\right),$$

т.е.

$$f(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\cos t \risingdotseq F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Проверим:

$$\frac{1}{2}\left(e^t-\cos t\right)\risingdotseq F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)}-\frac{p}{(p^2+1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+1-p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}\right)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)},$$

что и требовалось доказать.

5. Теоремы разложения

Теоремы разложения применяются для нахождения оригинала $f(t)$, когда известно изображение $F(p)$. Каждая из этих теорем справедлива лишь при определенных частных условиях, накладываемых на изображение $F(p)$. Однако классы функций, удовлетворяющих этим условиям, являются весьма широкими; вычисления же, связанные с применением теорем разложения, настолько просты, что использование этих теорем при решении многих конкретных задач оказывается весьма эффективным.

5.1. Первая теорема разложения

Предположим, что данное изображение $F(p)$ может быть разложено в ряд по степеням $\frac{1}{p}$:

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+...+\frac{a_n}{p^{n+1}}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}, \qquad (5.1)$$

сходящийся при $|p|>R$.

Если к каждому отдельному члену этого ряда применить операционное соотношение:

$$\frac{a_n}{p^{n+1}} \risingdotseq a_n\frac{t^n}{n!} \quad (n=0,1,2,...),$$

то оригинал $f(t)$ определяется формулой:

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+a_3\frac{t^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}. \qquad (5.2)$$

Пример 1. $F(p)=\frac{1}{p}arctg\frac{1}{p}$ разлагается в ряд:

$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{3p^4}+\frac{1}{5p^6}-...+\frac{(-1)^n}{(2n-1)p^{2n}}+...$$

По первой теореме разложения

$$f(t)=t-\frac{t^3}{3\cdot 3!}+\frac{t^5}{5\cdot 5!}-\frac{t^7}{7\cdot 7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot t^{(2n-1)}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots=\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau .$$

5.2. Вторая теорема разложения

Для того, чтобы найти оригинал функции $f(p)$, изображение $F(p)$ которой заданно дробно-рациональной функцией

$$F(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}=\frac{R(p)}{(p-p_1)^{k_1}(p-p_2)^{k_2}\ldots(p-p_m)^{k_m}},$$

(степень числителя меньше степени знаменателя), разлагаем изображение $F(p)$ на элементарные дроби, после чего находим оригинал каждой дроби.

Пример 2. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}\risingdotseq f(t)=?$

$$F(p)=\frac{p}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+2},$$

$$A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=0.$$

Получим:

$$F(p)=\frac{-1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}-\frac{(p+1)-1}{(p+1)^2+1}.$$

Запишем оригинал:

$$f(t)=-t\cdot e^{-t}+e^{-t}-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t=(-t+1-\cos t+\sin t)e^{-t}.$$

5.3. Третья теорема разложения

Если изображением $F(p)$ искомой функции $f(t)$ служит функция комплексного аргумента, регулярная справа от прямой $\operatorname{Re}p=\sigma_0$, а на этой прямой и слева от нее не имеющая других особенностей, кроме конечного множества полюсов и существенно особых точек, то оригиналом для этой функции служит функция $f(t)$, определяемая по формуле

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left\{e^{pt}F(p)\right\}. \qquad (5.3)$$

Пример 3. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)^2(p^2+1)}\risingdotseq f(t)=?$

$p=1$ - полюс 2-го порядка,

$p=\pm i$ - полюсы 1-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left\{e^{pt}F(p)\right\}=\lim_{p\to1}\left\{e^{pt}\cdot F(p)\cdot(p-1)^2\right\}'=\lim_{p\to1}\left\{e^{pt}\cdot\frac{p^2}{(p^2+1)}\right\}'=\frac{t+1}{2}\cdot e^t.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i}\left[e^{pt}F(p)\right]=\lim_{p\to i}\left[\frac{e^{pt}\cdot p^2}{(p-1)^2(p+i)}\right]=-\frac{1}{4}\cdot e^{it}.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-i}\left[e^{pt}F(p)\right]=\lim_{p\to -i}\left[\frac{e^{pt}\cdot p^2}{(p-1)^2(p-i)}\right]=-\frac{1}{4}\cdot e^{-it}.$$

$$f(t)=\frac{t+1}{2}e^t-\frac{1}{4}\left(e^{it}+e^{-ti}\right)=\frac{t+1}{2}e^t-\frac{1}{2}\cos t.$$

6. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методами операционного исчисления

Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+a_2x^{(n-2)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t) \qquad (6.1)$$

при начальных условиях: при $t=0,\ x=x_0$

$$x'=x_0',\ldots,x^{(n-1)}=x_0^{(n-1)}\cdot a_1,a_2,\ldots,a_n,$$

$x_0,x_0',\ldots,x_0^{(n-1)}$ - заданные постоянные, а $f(t)$ - заданная функция, изображаемая по Лапласу.

Обозначим изображение искомого решения через $X(p)$: $f(t)\risingdotseq X(p)$.

По теореме дифференцирования оригинала в силу заданных начальных условий имеем:

$$\begin{aligned}&x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0\\&x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px_0-x_0' \qquad (6.2)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&x^{(n)}(t)\risingdotseq p^nX(p)-p^{(n-1)}x_0-p^{(n-2)}x_0'-\ldots-x_0^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Пусть, далее, $f(t)\risingdotseq F(p)$.

Подставляя в (6.1) вместо функций их изображения, получаем так называемой изображающее уравнение:

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) X(p) - Y(p) = F(p), \tag{6.3}$$

которое является алгебраическим относительно изображения искомого решения

$$X(p) = \frac{F(p) + Y(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{6.4}$$

Для отыскания решения остается по изображению (6.4) найти его оригинал, пользуясь известными теоремами.

Пример 1. $x'''(t) + 4x'(t) = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

$$x(t) \risingdotseq X(p)$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - 0$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - p \cdot 0 - 0$$

$$x^{(n)}(t) \risingdotseq p^3 X(p) - p^2 \cdot 0 - p \cdot 0 - 0; \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

$$p^3 X(p) + 4pX(p) = \frac{1}{p}, \; X(p)\left[p^3 + 4p\right] = \frac{1}{p},$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+4)} = \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4(p^2+4)}.$$

$$X(p) \fallingdotseq x(t), \; \frac{1}{4p^2} \fallingdotseq \frac{1}{4}t, \quad \frac{1}{4(p^2+4)} \fallingdotseq \frac{1}{8}\sin 2t.$$

$$x(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

Пример 2.

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0, \; x(0) = 0, \; x'(0) = 1.$$

$$p^2 X(p) - 1 - 4px(p) + 5x(p) = 0.$$

$$x(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 5} = \frac{1}{(p-2)^2 + 1}.$$

$$x(t) = e^{-2t} \cdot \sin t.$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение:

$$x''(t)+4x(t)=2\sin 2t,\quad x(0)=-1,\ x'(0)=0.$$

Зная: $2\sin 2t \risingdotseq \dfrac{4}{p^2+4}$ и $x(t)\risingdotseq X(p)$, получим

$$p^2X(p)+p+4X(p)=\frac{4}{p^2+4},$$

отсюда

$$X(p)=\frac{4}{(p^2+4)^2}-\frac{p}{p^2+4}.$$

Оригиналы для изображений $\dfrac{p}{p^2+4}$ и $\dfrac{4}{p^2+4}$ известны, а именно:

$$\frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t,\quad \frac{4}{p^2+4}\risingdotseq 2\sin 2t.$$

Оригинал $\dfrac{4}{(p^2+4)^2}$ найдем по теореме свертывания:

$$\frac{4}{(p^2+4)^2}=\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{2}{p^2+4}\risingdotseq\int_0^t\sin 2\tau\sin 2(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(4\tau-2t)-\cos 2t\right]d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(4\tau-2t)-\tau\cos 2t\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 2t-t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin(-2t)\right]=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t\cos 2t.$$

Окончательно:

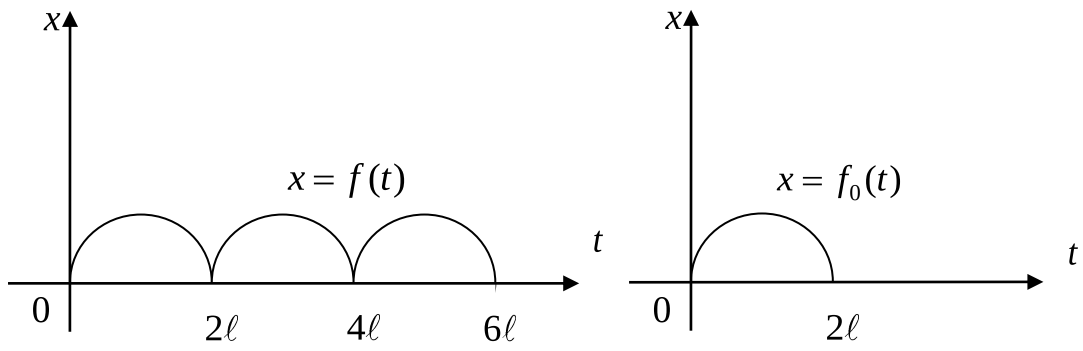
$$x(t)=-\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t\cos 2t$$

или

$$x(t)=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{t+2}{2}\cos 2t.$$

7. Изображение периодической функции

Пусть требуется найти изображение периодической функции $f(t)$ с $T=2\ell$ (при $t>0$ $f(t+2\ell)=f(t)$). (При $t<0$ $f(t)=0$).



Введем вспомогательную функцию $f_0(t)$, которая на полуотрезке $[0,2\ell)$ равна $f(t)$, вне этого отрезка равна 0, т.е.

$$f_0(t)=\begin{cases} f(t), & 0\le t<2\ell \\ 0, & t<0,\, t\ge 2\ell \end{cases}.$$

Ее изображением будет служить функция $F_0(p)$, определяемая следующим образом:

$$f_0(t) \risingdotseq F_0(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f_0(t)dt=\int_0^{2\ell} e^{-pt} f_0(t)dt,$$

т.к. $f_0(t)=\begin{cases} f(t), & 0\le t<2\ell \\ 0, & t<0,\, t\ge 2\ell \end{cases}.$

Но функцию $f(t)$ в свою очередь можно выразить через $f_0(t)$ следующим образом: $f(t)=h(\ell)f_0(t)+h(t-2\ell)f(t-2\ell)$, здесь $f(t-2\ell)$ - та же периодическая функция, но с запаздыванием на один период, равная нулю при $t<2\ell$. Переходя в последнем равенстве к изображениям и используя теорему запаздывания, получаем:

$$F(p)=F_0(p)+e^{-2\ell p}F(p).$$

Отсюда находим

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-2\ell p}}.$$

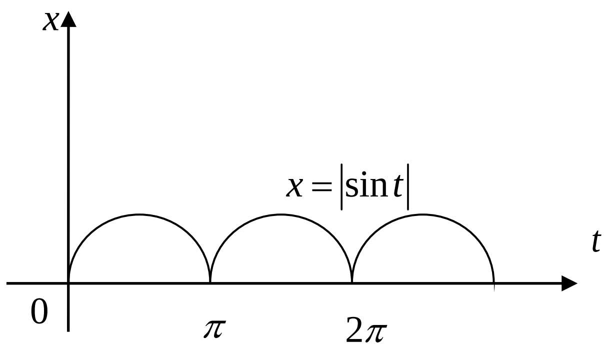
Таким образом, изображение периодической функции $f(t)$ с $T=2\ell$ определяется следующими формулами:

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-2\ell p}},$$

где

$$F_0(p) = \int_0^{2\ell} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Пример. В качестве примера найдем изображение функции $|\sin t|$.



Так как период функции $\sin t$ равен π, находим:

$$|\sin t| \risingdotseq F(p) = \frac{\int_0^{\pi} e^{-pt} |\sin t|\,dt}{1 - e^{-\pi p}} = \underbrace{\frac{1}{1 - e^{-\pi p}}}_{a} \left[-\int_0^{\pi} e^{-pt} d\cos t \right] =$$

$$= a \left[-e^{-pt} \cos t \Big|_0^{\pi} - p \int_0^{\pi} \cos t \, e^{-pt} dt \right] =$$

$$= a \left[e^{-pt} + 1 - p \left(\underbrace{e^{-pt} \sin t \Big|_0^{\pi}}_{=0} + p \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt \right) \right]_0^{\pi} =$$

$$= a \left[e^{-\pi p} + 1 - p^2 \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt \right]$$

$$F(p) = \frac{\left(1 + e^{-\pi p}\right)}{(1 + p^2)(1 - e^{-\pi p})} = \frac{cht\frac{\pi p}{2}}{1 + p^2}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

Основная литература

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1966.-331с.
2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Учебник для вузов (под ред. В.С.Зарубина и А.П. Крищенко). – М.: МГТУ, –1996. (Серия «Математика в техническом университете», вып. XI).
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задача и упражнения. – М.: Наука, 1981. – 215с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. Под ред.Ефимова А.В., Демидовича Б.П., т.2. – 2-е изд. - М.: Наука, 1986.-368с.

Дополнительная литература

1. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 628с.
3. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. М.: Высшая школа. – 1972. - 252с.

Методические и учебные пособия

1. Ванько В.И., Галкин С.В., Морозова В.Д. Методические указания для самостоятельной работы студентов по разделам «Теория функций комплексного переменного» и «Операционное исчисление». – М.: МВТУ,1988.-28с.
2. Шостак Р.Я. Учебное пособие по операционному исчислению. – М.: МВТУ, 1967. – 100с.