Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана.

Соболев С.К.

Криволинейные интегралы

Учебное пособие

Москва
МГТУ им. Баумана
2008

Введение

Студентам второго курса должно быть хорошо известно понятие от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, или, как еще говорят, ***по отрезку*** $[a;b]$, который обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Студенты также должны хорошо помнить свойства определенных интегралов, методы их вычисления, геометрические и физические приложения.

Оказывается, можно интегрировать функцию не только по прямолинейному отрезку координатной оси, но и вдоль любой линии AB на плоскости или в пространстве, которая может быть как прямолинейным отрезком, так и произвольной кривой. Такие интегралы называются ***криволинейными***, или просто ***линейными.*** При этом вычисление криволинейных интегралов сводится к вычислению определенных интегралов, а многие свойства и приложения криволинейных интегралов аналогичны соответствующим свойствам определенных интегралов. Можно считать, что криволинейный интеграл – это обобщение понятия обычного определенного интеграла. Криволинейный интеграл теснейшим образом связан с важнейшим понятием в физике: работа силового поля[1] вдоль некоторого пути.

В данном пособии даются все необходимые теоретические сведения относительно криволинейных интегралов, приведены их геометрические и физические приложения, разобраны иллюстрирующие примеры. Подробно освещается формула Грина и её применения.

Данное учебное пособие может полезно всем студентам технических Вузов, обучающихся на втором и более старших курсах, особенно тем, которые хотят углубить свои знания по криволинейным интегралам, а также молодым преподавателям.

---

[1] ***работа силового (векторного) поля $\boldsymbol{F}$***, затраченная на перемещение $\Delta\boldsymbol{s} = \overline{\Delta s}$ – это произведение модуля силы, величины перемещения и косинуса угла φ между ними, т.е. это скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения. $\Delta A = F \cdot \Delta s \cdot \cos\varphi = \boldsymbol{F} \bullet \Delta\boldsymbol{s}$. Работа переменной силы по произвольному пути выражается интегралом.

Изучая какое-нибудь понятие в математике, уясните для себя следующие четыре вещи: (1) что это такое (т.е. точное определение этого понятия); (2) какими свойствами оно обладает; (3) как это находить (т.е. каковы формулы для его вычисления) и (4) зачем это надо, т.е. каковы его приложения.

Автор – студентам

1. Криволинейный интеграл первого рода

1.1.Определение криволинейного интеграла первого рода.

Пусть дана (неориентированная) линия $\mathcal{L}$ с концами точках A и B и функция трех переменных $f(x,y,z)=f(M)$, определенная в каждой точке $M=M(x;y;z)\in\mathcal{L}$. Разобьем линию $\mathcal{L}$ на n (на обязательно равных) частей точками $A=C_0,C_1,C_2,...,C_{n-1},C_n=B$. Выберем на каждой дуге $C_{k-1}C_k$ произвольную точку $M_k(x_k;y_k;z_k)$, обозначим через Δl_k длину хорды[2] $C_{k-1}C_k$, $k=1,2,...,n$, и пусть $\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta l_k$ – ***мелкость*** полученного ***разбиения*** P линии $\mathcal{L}$ (см. Рис.1).

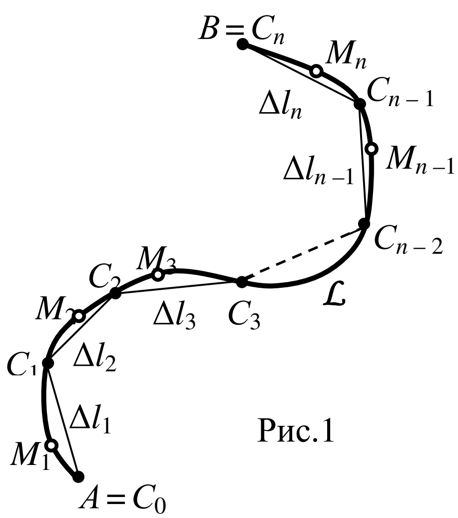

Рис.1

Составим ***интегральную сумму***

$$\sigma_f(P)\underset{def}{=}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\cdot\Delta l_k .$$

Если существует конечный предел этих интегральных сумм при стремлении мелкости разбиения к нулю, $\lambda(P)\to 0$, не зависящий от способа разбиения линии $\mathcal{L}$ на n частей и выбора точек C_k, то этот предел называется ***криволинейным*** (или просто ***линейным***) ***интегралом первого рода*** от функции $f(x,y,z)$ по линии $\mathcal{L}$, и обозначается:

$$\int\limits_{\mathcal{L}}f(x,y,z)\,dl\underset{def}{=}\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\Delta l_k$$ [3]

---

[2] В данном определении в качестве Δl_k взять и длину **дуги** $C_{k-1}C_k$.

[3] В никоторых книгах криволинейный интеграл первого рода обозначается $\int\limits_{\mathcal{L}}f(x,y,z)\,ds$

Теорема существования. Если линия $\mathcal{L}$ имеет **кусочно-гладкую параметризацию**[4], а функция $f(x,y,z)=f(M)$ непрерывна на ней, то существует криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl$.

Замечание 1. Точно так же определяется криволинейный интеграл от функции **двух** переменных $f(x,y)$ по произвольной линии $\mathcal{L}$, расположенной в плоскости *XOY*. Он обозначается, естественно,

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y)\,dl.$$

Замечание 2. На языке $\varepsilon-\delta$ запись $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k = J$ означает следующее:
Для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $n\in\mathbf{N}$ и всех разбиений *P* линии *L* на *n* точек и выбора на полученных дугах точек M_k $(1\le k\le n)$ из $\max\limits_{1\le k\le n}\Delta k_k<\delta$ следует $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k - J\right|<\varepsilon$.

1.2. Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) **Аддитивность:** если линия $\mathcal{L}$ есть объединение двух линий $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, имеющих, самое большее, конечное число общих точек, $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$, то
$$\int\limits_{\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\mathcal{L}_1} f(x,y,z)\,dl+\int\limits_{\mathcal{L}_2} f(x,y,z)\,dl;$$
(точнее, если существуют оба интеграла в правой части и то существует и интеграл в левой части и равен сумке двух первых).
2) **Линейность.** Для любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ и функций $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ справедливо равенство:
$$\int\limits_{\mathcal{L}}\big(\alpha\cdot f(x,y,z)+\beta\cdot g(x,y,z)\big)dl=\alpha\cdot\int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl+\beta\cdot\int\limits_{\mathcal{L}} g(x,y,z)\,dl;$$
(точнее, если существуют оба интеграла в правой части, то существует и интеграл в левой части и равен выражению, стоящему в правой части).
3) **Переход к неравенству под знаком интеграла.** Если линия $\mathcal{L}$ и функции $f(x,y,z)=f(M)$ и $g(x,y,z)=g(M)$ таковы, что для всех точек $M(x;y;z)\in\mathcal{L}$ выполняется неравенство $f(M)\le g(M)$, то

---

[4] Это значит, что линия $\mathcal{L}$ может быть задана параметрически функциями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, которые непрерывны, а их производные кусочно-непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$.

$$\int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl \le \int_{\mathcal{L}} g(x,y,z)\,dl;$$

(при условии, что оба интеграла существуют).

4) **Интеграл от константы.** Если линия $\mathcal{L}$ имеет длину L, то $\int_{\mathcal{L}} C\,dl = C\cdot L$, в частности, $L = \int_{\mathcal{L}} dl$.

5) **Теорема об оценке.** Если для всех точек $M(x;y;z)\in\mathcal{L}$ выполняется неравенство $m_1 \le f(x,y,z) \le m_2$, а линия $\mathcal{L}$ имеет длину L то выполняется неравенство:

$$m_1\cdot L \le \int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl \le m_2\cdot L.$$

(при условии, что данный криволинейный интеграл существует).

6) **Определение среднего значения функции.** ***Средним значением*** функции $f(x,y,z) = f(M)$ на линии $\mathcal{L}$ (имеющей длину L), называется величина $\hat{f}\big|_{\mathcal{L}} \underset{def}{=} \frac{1}{L}\int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl$.

7) **Теорема о среднем.** Если непрерывная линия $\mathcal{L}$ имеет длину L, а функция $f(x,y,z) = f(M)$ непрерывна на $\mathcal{L}$, то найдется точка $M_0\in\mathcal{L}$, такая, что $\int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl = f(M_0)\cdot L$, или, что равносильно $\hat{f}\big|_{\mathcal{L}} = f(M_0)$.

1.3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.

Формула для вычисления криволинейного интеграла по линии $\mathcal{L}$ зависит от способа задания этой линии.

1) линия $\mathcal{L}$ задана в пространстве (или на плоскости) параметрически:

$$\mathcal{L}:\ \left.\begin{aligned} x &= x(t),\\ y &= y(t)\\ z &= z(t)\end{aligned}\right\}\ t\in[\alpha;\beta],\ \text{то}$$

$$\int_{\mathcal{L}} f(x,y,z)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\cdot dt.$$

понятно, что на плоскости справедлива аналогичная формула:

$$\int_{\mathcal{L}} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\cdot\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\cdot dt.$$

2) Линия $\mathcal{L}$ задана на плоскости XOY явно, т.е. $\mathcal{L}$: $y = y(x),\ x\in[a;b]$. Тогда:

$$\int_{\mathcal{L}} f(x,y)\,dl = \int_{a}^{b} f\big(x,y(x)\big)\cdot\sqrt{1+\big(y'_x\big)^2}\cdot dx.$$

.

3) Линия $\mathcal{L}$ задана на плоскости в полярных координатах[5]:

$$\mathcal{L}:\ r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f\left(r(\varphi)\cos\varphi,\, r(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{r^2+\left(r'_{\varphi}\right)^2}\cdot d\varphi$$

Упражнение 1. Напишите формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода по линии, заданной на плоскости XOY явно: $\mathcal{L}$: $x = x(y),\ y \in [c;d]$.

1.4. Геометрические приложения криволинейного интеграла первого рода.

1) **Длина** кривой $\mathcal{L}$ выражается формулой: $L = \int\limits_{\mathcal{L}} dl$.
2) **Площадь цилиндрической поверхности**[6] σ с образующей параллельной оси OZ и направляющей линией $\mathcal{L}$ и расположенной между плоскостью XOY и поверхностью $z = f(x,y)$ (см. рис.2), выражается формулой:
$$S(\sigma) = \int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y)\,dl. \qquad (1)$$
3) **Площадь поверхности вращения** σ, полученной вращением плоской кривой $\mathcal{L}$ вокруг оси, расположенной в той же плоскости XOY (см. рис. 3), равна:
$$S(\sigma) = 2\pi\int\limits_{\mathcal{L}} R(x,y)\,dl, \qquad (2)$$
где $R(x,y)$ – расстояние от произвольной точки $M(x;y)$ кривой $\mathcal{L}$ до оси вращения. В частности, если ось вращения совпадает с осью OX, то $R(x,y) = |y|$, а если ось вращения параллельна оси OY и задана уравнением $x = a$, то $R(x,y) = |x-a|$. В общем случае расстояние от

[5] **Полярная система координат** на плоскости задаются началом отсчета точкой O, называемой ***полюсом*** (обычно совмещаемой с началом координат), и выходящей из неё лучом, называемой ***полярной осью*** (которая обычно совпадает с осью OX). Полярные координаты точки M – это пара чисел $(\varphi; r)$, где φ – ориентированный угол между полярной осью и вектором $\overline{OM}$, а $r = |OM| \ge 0$ – расстояние между точками M и O (вместо латинской буквы r иногда используется греческая буква ρ). Декартовы координаты $M(x;y)$ и полярные координаты $M(\varphi;r)$ связаны соотношениями: $x = r\cdot\cos\varphi,\ \ y = r\cdot\sin\varphi,\ \ x^2+y^2=r^2$.

[6] ***Цилиндрическая поверхность*** – поверхность, полученная поступательным движением в пространстве некоторой прямой, пересекающей некоторую линию L, называемой ***направляющей*** цилиндрической поверхности, и остающейся параллельной некоторой фиксированной прямой. Каждая из прямых, составляющих цилиндрическую поверхность, называется её ***образующей.*** Если поверхность задана в пространстве уравнением с двумя переменными, то эта поверхность – цилиндрическая, образующая которой параллельна оси, одноименной с отсутствующей переменной.

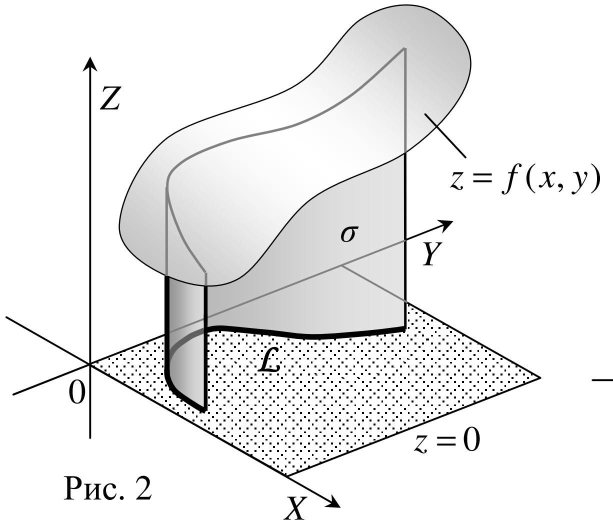

Рис. 2

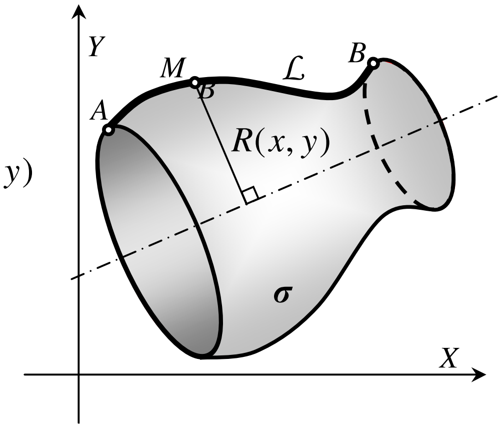

Рис. 3

точки $M(x;y)$ до прямой $ax+by+c=0$ выражается формулой $R(x,y)=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1.5. Физические приложения криволинейного интеграла первого рода.

1) **Масса материальной линии.** Пусть материальная (например, пространственная) линия $\mathcal{L}$ имеет в каждой своей точке $M(x,y,z)\in\mathcal{L}$ линейную плотность массы $\mu(x,y,z)$. Тогда **масса** линии $\mathcal{L}$ равна:

$$m(\mathcal{L})=\int\limits_{\mathcal{L}}\mu(x,y,z)\,dl\,.$$

Точно такая же формула для **полного заряда** Q, расположенного на материальной (например, плоской) линии $\mathcal{L}$, если известна линейная плотность зарядов $q(x,y)$ в каждой точке $M(x;y)\in\mathcal{L}$:

$$Q(\mathcal{L})=\int\limits_{\mathcal{L}}q(x,y)\,dl\,.$$

2) **Координаты центра масс.** Пусть материальная (например, пространственная) линия $\mathcal{L}$ имеет в каждой своей точке $M(x,y,z)\in\mathcal{L}$ линейную плотность массы $\mu(x,y,z)$. Тогда центр масс $C(x_0;y_0;z_0)$ линии $\mathcal{L}$ имеет координаты:

$$x_0=\frac{M_x}{m(\mathcal{L})},\ \ y_0=\frac{M_y}{m(\mathcal{L})},\ z_0=\frac{M_z}{m(\mathcal{L})},,$$

где $m(\mathcal{L})=\int\limits_{\mathcal{L}}\mu(x,y,z)\,dl$ – масса этой линии, и

$$M_x=\int\limits_{\mathcal{L}}x\cdot\mu(x,y,z)dl,\ M_y=\int\limits_{\mathcal{L}}y\cdot\mu(x,y,z)dl,\ M_z=\int\limits_{\mathcal{L}}z\cdot\mu(x,y,z)dl\,.$$

Аналогично находятся координаты центра масс плоской линии.

3) **Определение**. ***Центрóидом*** линии $\mathcal{L}$ (нематериальной, просто геометрической фигуры) называется центр масс этой линии с любой постоянной плотностью (например, равной единице). Например, если линия $\mathcal{L}$ расположена в плоскости XOY, то её центроид $C(x_0;\, y_0)$ имеет координаты:

$$x_0 = \frac{L_x}{L},\ \ y_0 = \frac{L_y}{L},$$

где $L_x = \int\limits_{\mathcal{L}} x\,dl,\, L_y = \int\limits_{\mathcal{L}} y\,dl$ и $L = \int\limits_{\mathcal{L}} dl$ – длина кривой $\mathcal{L}$.

4) **Первая формула Гульдина[7].** *Площадь поверхности, полученная вращением вокруг оси кривой, расположенной в плоскости оси вращения по одну сторону от неё, равна произведению длины этой линии на длину окружности, которую описывает при вращении центроид этой линии*, т.е.

$$S = L\cdot 2\pi R_0,$$

где L – длина линии, R_0 – расстояние от центрóида линии до оси вращения.

Упражнение 2. Не выполняя интегрирования, найдите с помощью первой формулы Гульдина расстояние от центроида полуокружности радиуса R до прямой, проходящей через её концы.

5) **Момент инерции.** Пусть материальная (например, пространственная) линия $\mathcal{L}$ имеет в каждой своей точке $M(x,y,z)\in\mathcal{L}$ линейную плотность массы $\mu(x,y,z)$. Тогда момент инерции линии $\mathcal{L}$ относительно некоторой оси s равен

$$I_s = \int\limits_{\mathcal{L}} R^2(x,y,z)\cdot\mu(x,y,z)\,dl$$

где $R(x,y,z)$ расстояние от точки $M(x,y,z)\in\mathcal{L}$ до оси s. Например, если s есть ось OX, то $R^2(x,y,z) = y^2 + z^2$.

6) **Ньютонов** (гравитационный или электрический) **потенциал** материальной линии $\mathcal{L}$ в данной точке $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, расположенной вне этой кривой $\mathcal{L}$, имеющей линейную плотность (массы или соответственно заряда) $\mu(x,y,z)$:

$$U(M_0) = \int\limits_{L} \frac{\mu(x,y,z)}{R(x,y,z)}\,dl, \tag{3}$$

[7] Гульдин Пауль (1577–1643) – швейцарский математик. Написал работу о центрах тяжести тел, в которой также трактуются вопросы о поверхностях и объёмах тел. С его именем связан ряд теорем для определения объёмов и поверхностей тел вращения.

где $R(x,y,z)$ – расстояние от произвольной точки $M(x;y;z)\in\mathcal{L}$ до точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, т.е. $R(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

1.6. Криволинейный интеграл первого рода от векторной функции

Обычно криволинейный интеграл вычисляется от **скалярной** функции $f(x,y,z)$, т.е. скалярного поля[8], и значением этого интеграла является число, т.е. тоже **скаляр**. Но в принципе, криволинейный интеграл первого рода можно находить и от **векторной** функции, т.е. от **векторного поля[9].** А именно, если в пространстве заданы линия $\mathcal{L}$ и векторное поле $\boldsymbol{G}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, то, по определению,

$$\int_{\mathcal{L}}\boldsymbol{G}(x,y,z)\,dl \underset{def}{=} \boldsymbol{i}\int_{\mathcal{L}}P(x,y,z)\,dl+\boldsymbol{j}\int_{\mathcal{L}}Q(x,y,z)\,dl+\boldsymbol{k}\int_{\mathcal{L}}R(x,y,z)\,dl.$$

Понятно, что значение такого интеграла есть **вектор**.

Упражнение 3. Материальная линия $\mathcal{L}$ имеет линейную плотность массы (или заряда) $\mu(x,y,z)$ и расположена в гравитационном (или электрическом) поле имеющем напряженность $\boldsymbol{E}(x,y,z)$. Написать формулу для вектора силы $\boldsymbol{F}$, действующей на эту линию со стороны поля.

1.7. Примеры на вычисление и приложения криволинейного интеграла первого рода.

Пример 1. Найти площадь поверхности, полученной вращением кривой $\mathcal{L}$: $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ вокруг прямой $y=x$.

Решение. Перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получим: $r^4=a^2r^2\cos\varphi\Rightarrow r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$. Тогда кривая $\mathcal{L}$ – это половина одной петли лемнискаты Бернулли (см. Рис 4). Расстояние от точки $M(x;y)$ до прямой $x-y=0$ выражается формулой:

---

[8] ***скалярное поле*** – это отображение, которой каждой точке $M(x;y;z)$ некоторой области Ω пространства (или плоскости) ставит в соответствие некоторой число (скаляр) $U(M)=f(x,y,z)$. Примеры скалярных полей: температура (в данной точке), давление, влажность, каждая из координат точки, расстояние от точки до фиксированной точки ($P(a;b;c)$. Последнее скалярное поле выражается формулой $U=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

[9] ***векторное поле*** в пространстве – это отображение, которой каждой точке $M(x;y;z)$ некоторой области Ω плоскости или пространства ставит в соответствие некоторый вектор $\boldsymbol{G}(M)=\boldsymbol{G}(x,y,z)$, Векторное поле в пространстве $\boldsymbol{G}(M)=\boldsymbol{G}(x,y,z)$ вполне определяется своими тремя скалярными компонентами (координатными функциями): $\boldsymbol{G}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$., а плоское векторное поле определяется двумя координатными функциями: $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$

$$R(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\frac{r(\cos\varphi-\sin\varphi)}{\sqrt{2}}=r\cos\left(\varphi+\tfrac{\pi}{4}\right).$$

В данном случае

$$dl=\sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2\cos2\varphi+\left(-a\frac{\sin2\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}\right)^2}\,d\varphi=a\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}.$$

По формуле (2), площадь поверхности вращения равна

$$S=2\pi\int\limits_{\mathcal{L}}R(x,y)\,dl=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\left(\varphi+\tfrac{\pi}{4}\right)dl=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\left(\varphi+\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot a\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}=2\pi a^2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\varphi+\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot d\varphi=$$

$$=2\pi a^2\sin\left(\varphi+\tfrac{\pi}{4}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}=2\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

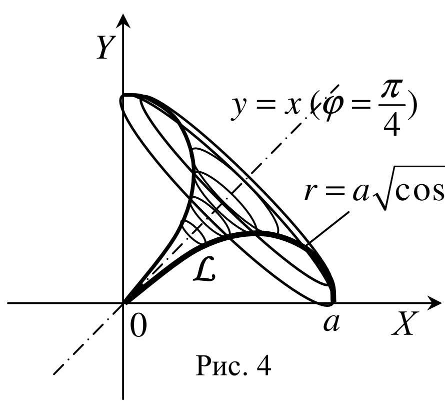

Рис. 4

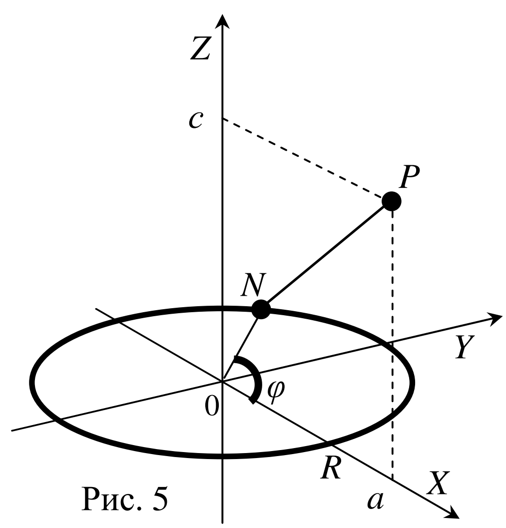

Рис. 5

Пример 2. Вычислить ньютонов потенциал окружности $x^2+y^2=R^2,\ z=0$ массой M в точке $P(a;0;c)$, плотность в любой точке окружности пропорциональна расстоянию от этой точки до оси *OX*.

Решение. Параметризуем окружность: (см. Рис 5):

$$x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le2\pi.$$

Тогда, как легко проверить,

$$dl=\sqrt{(-R\sin\varphi)^2+\left(R\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi=R\cdot d\varphi,$$

$$|NP|=\sqrt{(R\cos\varphi-a)^2+(R\sin\varphi)^2+c^2}=\sqrt{R^2+a^2+c^2-2Ra\cos\varphi}.$$

Плотность линии в точке $N(x;y)$ равна $\mu = k|y| = kR|\sin\varphi|$. Найдем коэффициент $k>0$, для чего вычислим массу окружности:

$M = 2\int\limits_0^{\pi} \mu\cdot dl = 2kR^2\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = 4kR^2$, откуда $k = \dfrac{M}{4R^2}$.

Поэтому, по формуле (3), потенциал в точке P равен:

$U(P) = \int\limits_L \dfrac{\mu dl}{|PN|} = 2\int\limits_0^{\pi}\dfrac{kR^2\sin\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2+c^2-2Ra\cos\varphi}}$ Для вычисления этого интеграла сделаем замену:

$$t = R^2+a^2+c^2-2Ra\cos\varphi \Rightarrow dt = 2Ra\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi,$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow t = c^2+(R-a)^2, \varphi = \pi \Rightarrow t = c^2+(R+a)^2,$$

Тогда:

$$U(P) = \frac{kR}{a}\int\limits_{c^2+(R-a)^2}^{c^2+(R+a)^2}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{M}{2aR}\left(\sqrt{c^2+(R+a)^2}-\sqrt{c^2+(R-a)^2}\right) =$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{c^2+(R+a)^2}+\sqrt{c^2+(R-a)^2}}.$$

2. Криволинейный интеграл второго рода (работа векторного поля вдоль ориентированного пути.

2.1 Определение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть дан ***путь***, т.е. **ориентированная** линия $\mathcal{L}$ с концами точках A и B (т.е. линия, на которой указано **направление**, например, от A к B), и векторное поле $\boldsymbol{G}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$.

Разобьем линию $\mathcal{L}$ на n (на обязательно равных) частей точками $A = C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n = B$. Выберем на каждой дуге $C_{k-1}C_k$ произвольную точку $M_k(x_k;y_k;z_k)$, обозначим $\Delta\boldsymbol{l}_k = \overline{C_{k-1}C_k} = \Delta x_k\boldsymbol{i}+\Delta y_k\boldsymbol{j}+\Delta z_k\boldsymbol{k}$, $k = 1,2,...,n$, и пусть $\lambda(P) = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta\boldsymbol{l}_k|$ (***мелкость*** полученного ***разбиения*** P ориентированной линии $\mathcal{L}$).

Составим ***интегральную сумму*** $\sigma_{\boldsymbol{G}}(P) \underset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{G}(M_k)\bullet\Delta\boldsymbol{l}_k\right) =$

(сумма скалярных произведений векторов $\boldsymbol{G}(M_k)$ на векторы $\overline{\Delta l_k} = \Delta\boldsymbol{l}_k$)

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(P(M_k)\cdot\Delta x_k + Q(M_k)\cdot\Delta y_k + R(M_k)\cdot\Delta z_k\right).$$

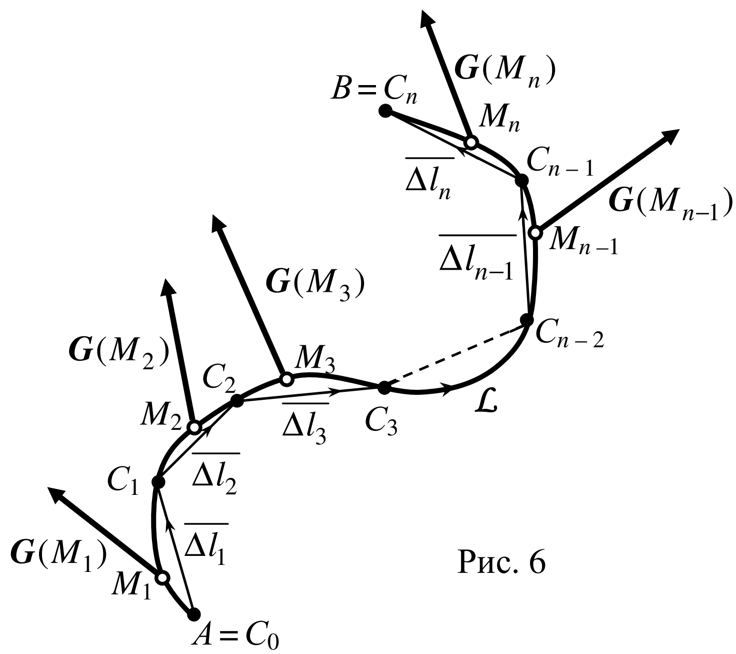

Рис. 6

Если существует конечный предел этих интегральных сумм при стремлении мелкости разбиения к нулю, $\lambda(P)\to 0$, не зависящий от способа разбиения линии $\mathcal{L}$ на n частей и выбора точек C_k, то этот предел называется ***криволинейным*** (или просто ***линейным***) ***интегралом*** второго рода от векторной функции $\boldsymbol{G}(x,y,z)$, (или ***работой*** векторного поля $\boldsymbol{G}(x,y,z)$) вдоль ориентированной линии (пути) $\mathcal{L}$, и обозначается:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx+Qdy+Rdz =$$

$$\underset{def}{=} \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_{\boldsymbol{G}}(P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{G}(M_k)\cdot \Delta\boldsymbol{l}_k\right) =$$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(P(M_k)\cdot\Delta x_k + Q(M_k)\cdot\Delta y_k + R(M_k)\cdot\Delta z_k\right).$$

Замечание. Криволинейный интеграл второго рода можно определить и **на плоскости**. А именно, если на плоскости XOY заданы ориентированная линия (путь) $\mathcal{L}$ и **плоское** векторное поле $\boldsymbol{G}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$, то соответствующий криволинейный интеграл второго рода обозначается, естественно, так:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y)\cdot d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\mathcal{L}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Теорема существования. Если ориентированная линия $\mathcal{L}$ имеет кусочно-гладкую параметризацию, а векторное поле

$$\boldsymbol{G}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

непрерывно на ней, то существует криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y,z)\bullet \boldsymbol{dl}$.

2.2. Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) При смене **ориентации** линии на противоположную криволинейный интеграл **второго** рода меняет знак[10], т.е. если путь $\mathcal{L}_1$ отличается от пути $\mathcal{L}$ только ориентацией, символически $\mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}$, то для любого векторного поля $\boldsymbol{G}$:
$$\int\limits_{-\mathcal{L}} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl} = -\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl};$$
2) **Аддитивность.** Пусть точка C на пути (ориентированной линии) $\mathcal{L}$ делит его на два пути $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ с той же ориентацией, т.е., символически $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, то
$$\int\limits_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl} = \int\limits_{\mathcal{L}_1} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl} + \int\limits_{\mathcal{L}_2} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl}$$
(точнее, если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл, стоящий слева и равен выражению, стоящему справа).
3) **Линейность.** Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и векторных полей $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ справедливо равенство:
$$\int\limits_{\mathcal{L}} (\alpha\cdot \boldsymbol{F} + \beta\cdot \boldsymbol{G})\bullet \boldsymbol{dl} = \alpha\cdot\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{F}\bullet \boldsymbol{dl} + \beta\cdot\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl};$$
(точнее, если существуют оба интеграла в правой части, то существует и интеграл в левой части и равен выражению, стоящему в правой части).
4) **Теорема об оценке.** Если путь $\mathcal{L}$ имеет длину L, и в любой точке $M \in \mathcal{L}$ для векторного поля $\boldsymbol{G}(M)$ справедливо неравенство $|\boldsymbol{G}(M)| \le C$, то справедлива оценка $\left|\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl}\right| \le C\cdot L$.
5) **Связь с криволинейным интегралом первого рода.** Пусть в любой точке $M \in \mathcal{L}$ векторное поле $\boldsymbol{G}(M)$ образует с касательным вектором[11] к ориентированной кривой в этой точке угол φ (вообще говоря, зависящим от точки M), то
$$\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}\bullet \boldsymbol{dl} = \int\limits_{\mathcal{L}} |\boldsymbol{G}|\cdot\cos\varphi\cdot dl$$
(слева стоит криволинейный интеграл второго рода, а справа – первого).

---

[10] Напомним, что криволинейный интеграл **первого** рода по линии $\mathcal{L}$ **не зависит** от её ориентации.

[11] касательный вектор $\boldsymbol{s}$ к кривой $\mathcal{L}$, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и с ориентацией, соответствующей возрастанию параметра t, имеет координаты $\boldsymbol{s}\{x'(t);\, y'(t);\, z'(t)\}$.

2.3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.

1) Основная формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода, по сути, содержится во второй формой записи этого интеграла:

$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y,z)\bullet d\boldsymbol{l} = \int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz$$

А именно, пусть в пространстве задана параметризация пути $\mathcal{L}$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$,

причем, заданная ориентация на $\mathcal{L}$ соответствует изменению параметра t от $t = \alpha$ до $t = \beta$ (возможно также, что $\alpha > \beta$). Тогда $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$ и

$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y,z)\bullet d\boldsymbol{l} = \int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \big) \cdot dt. \quad (4)$$

2) В случае «двумерного» криволинейного интеграла второго рода данная формула для вычисления выглядит уже не так громоздко:

$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y)\bullet d\boldsymbol{l} = \int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \big) \cdot dt.$$

3) Следующие формулы являются частными случаями предыдущих Например, если на плоскости путь $\mathcal{L}$ задан явно: $y = y(x)$, причем, ориентация пути соответствует изменению x от $x = a$ до $x = b$ (возможно, что $a < b$) то в качестве параметра выступает x, и предыдущая формула принимает такой вид:

$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y)\bullet d\boldsymbol{l} = \int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy = \int_{a}^{b} \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) \big) \cdot dx.$$

4) Если же ориентированная линия $\mathcal{L}$ задана на плоскости в **полярных координатах:** $r = r(\varphi)$, где φ изменяется от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, то надо подставить формулы

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$
$$dx = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)d\varphi, dy = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)d\varphi$$

И поэтому формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода в полярных координатах принимает такой вид:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y)\bullet d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\mathcal{L}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P\big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big)\big(r'\cos\varphi - r\sin\varphi\big) +$$

$$+ Q\big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big)\big(r'\sin\varphi + r\cos\varphi\big)\big)d\varphi$$

Упражнение 4. Напишите формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода вдоль пути, заданного явно $x = x(y)$, где y изменяется от $y = c$ до $y = d$.

Замечание. Часто путем интегрирования (или его частью) в криволинейном интеграле является отрезок прямой. Если начало и конец отрезка расположены соответственно в точках $A_1(a_1; b_1; c_1)$ и $A_2(a_2; b_2; c_2)$, то отрезок A_1A_2 задаётся параметрически уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + (a_2 - a_1)\cdot t, \\ y &= b_1 + (b_2 - b_1)\cdot t, \\ y &= b_1 + (b_2 - b_1)\cdot t, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

причем t изменяется от $t = 0$ (точка A_1) до $t = 1$ (точка A_2).

Пример 3. Найти работу векторного поля $\boldsymbol{G} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$ вдоль одного витка винтовой линии $\mathcal{L}$: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$, направление от точки $A(R; 0; 2a\pi)$ до точки $B(R; 0; 0)$ (см. Рис. 7).

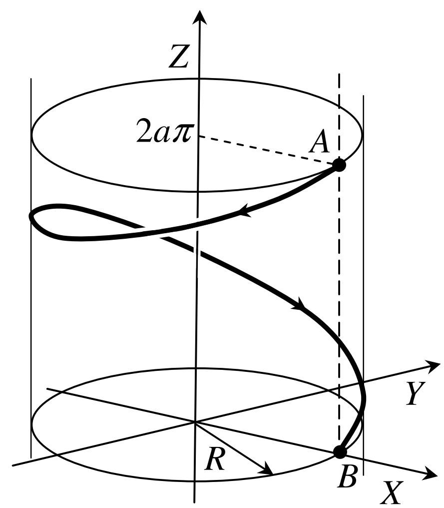

Рис.7

Решение. Ориентация пути $\mathcal{L}$ соответствует **убыванию** параметра t от $t = 2\pi$ до $t = 0$. По формуле (4), искомая работа равна:

$$A = \int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}\bullet d\boldsymbol{l} = \int\limits_{2\pi}^{0} \big(R\sin t(-R\sin t) + atR\cos t - aR\cos t\big)dt =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}R^2(t - \tfrac{1}{2}\sin 2t) + aR(t\sin t + \cos t) - aR\sin t\right)\Bigg|_{t=2\pi}^{t=0} = \pi R^2.$$

3. Формула Грина.

3.1. Предварительные определения

Циркуляция векторного поля. Если путь в интеграле второго рода представляет собой замкнутый контур, то он называется ***циркуляцией*** векторного поля по данному контуру и обозначается интегралом с кружочком:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y,z)\bullet \boldsymbol{dl} = \oint\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

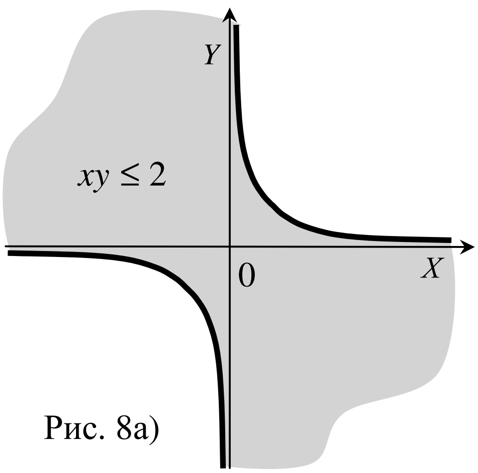

Рис. 8а)

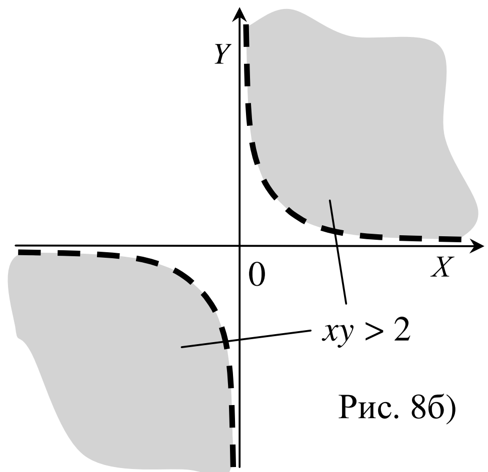

Рис. 8б)

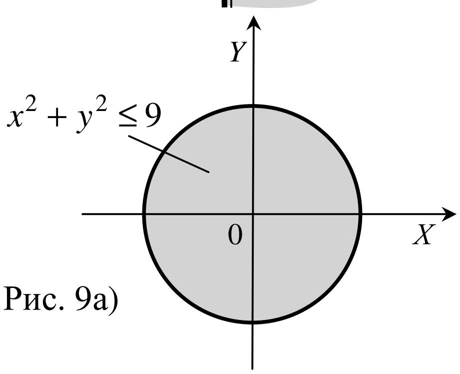

Рис. 9а)

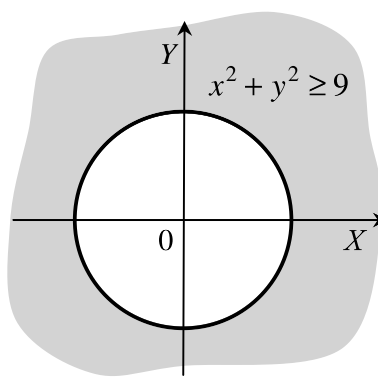

Рис. 9б)

Связные и односвязные плоские множества. Множество *D* плоскости (или пространства) называется ***связным*** (точнее, ***линейно связным***), если любые две его точки *A* и *B* можно соединить непрерывной линией, целиком находящейся во множестве *D*. Плоское множество *D* называется ***односвязным***, если оно связно, и любой замкнутый контур внутри него ограничивает некоторое множество, целиком лежащее в области *D*.

Пример 4. Множество плоскости *XOY*, заданное неравенством $xy \le 2$, связно, а неравенством $xy > 2$ – несвязно (см. Рис. 8(а, б)). Каждое из множеств $x^2 + y^2 \le 9$ и $x^2 + y^2 \ge 9$, связно, но только первое из них односвязно (см. Рис. 9(а, б)).

3.2. Теорема Грина

Теорема 1. *Пусть на плоскости дана односвязная замкнутая область D, ограниченная замкнутым кусочно-гладким ориентированным контуром Γ (символически $\Gamma = \partial(D)$), причем при обходе контура область остается* ***слева*** *(т.е. обход контура производится* ***против*** *часовой стрелке, (см. Рис. 10). Пусть, далее, компоненты $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ плоского векторного поля $\boldsymbol{G}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ и их частные производные по y и по x, соответственно, непрерывны в области D. Тогда справедлива формула (**формула Грина**):*

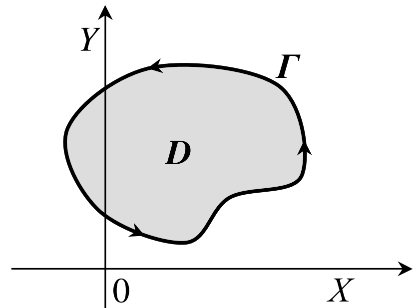

Рис. 10

$$\oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,. \tag{6}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} ydx + x^2dy$ по замкнутому контуру Γ, состоящему из дуги AOB параболы $y = x^2$ и отрезка прямой BA, где $A(-1;1), B(3;9)$, направление обхода: $A{\to}O{\to}B{\to}A$ (см. рис.11).

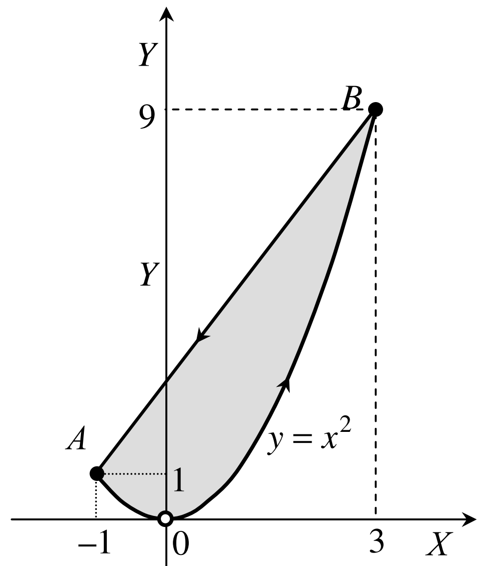

Рис. 11

Решение. Сначала вычислим этот интеграл непосредственно. Он равен

$$J = \oint\limits_{\Gamma} ydx + x^2dy = \int\limits_{AOB} + \int\limits_{BA}\ .$$

В первом интеграле путь AOB задается уравнением $y = x^2$, параметром является переменная x, которая изменяется от $x = -1$ до $x = 3$, тогда $dy = 2xdx$, и поэтому

$$\int\limits_{AOB} ydx + x^2dy = \int\limits_{-1}^{3} \left(x^2 + x^2 \cdot 2x\right)dx = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4\right)\Big|_{x=-1}^{x=3} = \frac{28}{3} + 40 = \frac{148}{3}.$$

Во втором интеграле по отрезку BA, где $B(3;9), A(-1;1)$, параметризация задается, по формулам (5), уравнениями $x = 3 - 4t,\ y = 9 - 8t$, и параметр t изменяется от $t = 0$ (точка B) до $t = 1$ (точка A). Тогда $dx = -4dt, dy = -8dt$, и поэтому:

$$\int_{BA} y\,dx + x^2 dy = \int_0^1 \Big((9-8t)(-4) + (3-4t)^2(-8)\Big)dt =$$

$$\{\text{замена: } 4t = \tau\}$$

$$= \int_0^4 \Big((9-2\tau)(-1) + (3-\tau)^2(-2)\Big)d\tau =$$

$$= \int_0^4 \Big(-2\tau^2 + 14\tau - 27\Big)d\tau = -\frac{128}{3} + 112 - 108 = -\frac{116}{3}.$$

Следовательно, вся циркуляция равна $J = \frac{148}{3} - \frac{116}{3} = \frac{32}{3}$.

Теперь вычислим этот же интеграл по формуле Грина. Здесь $P(x,y) = y, Q(x,y) = x^2$, Уравнение прямой *AB*: $y = 2x+3$, контур Γ ограничивает область *D*, заданную неравенствами (см Рис.11):

$$\begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x^2 \le y \le 2x+3 \end{cases}.$$

Поэтому, по формуле Грина (6), циркуляция равна:

$$J = \oint_\Gamma y\,dx + x^2 dy = \iint_D \left(\tfrac{\partial(x^2)}{\partial x} - \tfrac{\partial y}{\partial y}\right)dxdy = \int_{-1}^{3} dx \int_{x^2}^{2x+3} (2x-1)dy =$$

$$= \int_{-1}^{3} dx(2x-1)\left(2x+3-x^2\right) = \int_{-1}^{3}\left(-2x^3+5x^2+4x-3\right)dx =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{3} = -40 + \frac{140}{3} + 16 - 12 = \frac{140-108}{3} = \frac{32}{3}.$$

3.3. Приложения формулы Грина.

С помощью криволинейного интеграла можно находить **площадь плоской области**. А именно, пусть замкнутый контур Γ ограничивает односвязную область *D*, и при обходе область остается **слева**, т.е. $\Gamma = \partial D$. Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – любые две непрерывно дифференцируемые функции такие, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$ (например, $P = -y, Q = 0$, или $P = 0, Q = x$). Тогда

$$S(D) = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

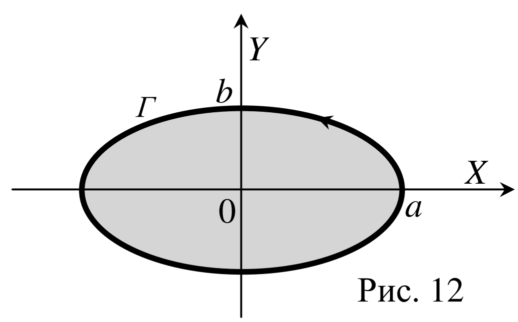

Рис. 12

В частности,

$$S(D) = -\oint_{\partial D} y\,dx = \oint_{\partial D} x\,dy = \tfrac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx. \quad (7)$$

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

Решение. Как известно, эллипс с полуосями a и b с центром в начале координат (см. Рис. 12) задается каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и допускает параметризацию $x=a\cdot\cos t,\ y=b\cdot\sin t, 0\le t\le 2\pi$, причем положительному (согласованному) направлению обхода контура (т.е. эллипса) Γ соответствует **возрастание** параметра t. Поэтому, согласно второй формуле (7), искомая площадь равна:

$$S=\oint\limits_{\Gamma} x\,dy=\int\limits_{0}^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\cdot dt=\tfrac{1}{2}ab\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=\pi ab.$$

С помощью формулы Грина можно вычислять и криволинейный интеграл по **незамкнутому** пути. А именно, пусть $\Gamma_1=ACB$ и $\Gamma_2=ADB$ – два незамкнутых ориентированных пути на плоскости XOY, начинающихся в одной и той же точке A и заканчивающиеся в одной и той же точке B, и не имеющих других общих точек. Пусть эти две линии ограничивают область D. Возможны два случая:

(1°) $\partial D=\Gamma_1-\Gamma_2=ACBDA$ (т.е. область D находится слева от пути Γ_1 и справа от пути Γ_2 (см. рис 13(а));

(2°) $\partial D=\Gamma_2-\Gamma_1=ADBCA$ (т.е. область D находится справа от пути Γ_1 и слева от пути Γ_2 (см. рис 13(а)).

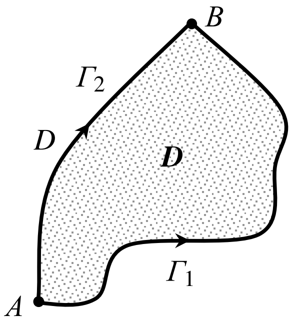

Рис. 13(а)

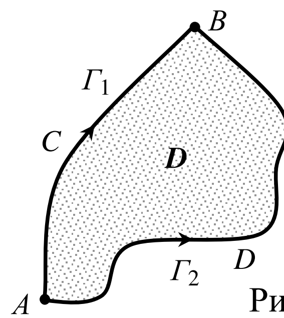

Рис. 13(б)

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\Gamma_2} P\,dx+Q\,dy\pm\iint\limits_{D}\left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}-\tfrac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (8)$$

Знак «плюс» перед двойным интегралом соответствует первому случаю, а знак «минус» – второму.

Эту формулу целесообразно применять, когда интеграл по пути Γ_2 вычисляется гораздо проще, чем по пути Γ_1 и когда выражение $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ тоже относительно просто, в идеале – константа.

Пример 7. Найти работу векторного поля

$$\boldsymbol{F} = \left(2y + y\sin\tfrac{\pi x}{y}\right)\cdot\boldsymbol{i} - \left(\tfrac{2y}{\pi}\cos\tfrac{\pi x}{y} + x + x\sin\tfrac{\pi x}{y}\right)\cdot\boldsymbol{j}$$

вдоль правой части кривой $x^2 + y^2 + 30 = 4x + 12y$ от точки $A(1;\,3)$ до точки $B(3;\,9)$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 + 30 = 4x + 12y \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-6)^2 = 10$ задает окружность радиуса $R = \sqrt{10}$ с центром в точке $C(2;6)$, точки A и B лежат на этой окружности и являются диаметрально противоположными. Данный путь Γ_1 представляет собой правую дугу окружности, соединяющую точки A и B. В качестве пути Γ_2 возьмем отрезок прямой AB. Тогда область D, ограниченная замкнутым контуром $\Gamma_1 - \Gamma_2 = \partial D$, есть полукруг радиуса $R = \sqrt{10}$ (см. (Рис. 14). Чтобы применить формулу (6), параметризуем путь Γ_2 – отрезок AB: $y = 3x$, x изменяется от $x = 1$ до $x = 3$. Здесь:

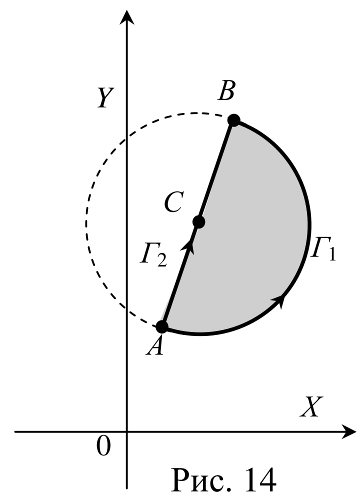

Рис. 14

$$P = 2y + y\sin\tfrac{\pi x}{y} = 6x + 3x\sin\tfrac{\pi}{3} = x\left(6 + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$Q = -\left(\tfrac{2y}{\pi}\cos\tfrac{\pi x}{y} + x + x\sin\tfrac{\pi x}{y}\right) = -\tfrac{6x}{\pi}\cos\tfrac{\pi}{3} - x - x\tfrac{\sqrt{3}}{2} = -x\left(\tfrac{3}{\pi} + 1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad dy = 3dx.$$

Поэтому $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_1^3 x\left(6 + \tfrac{3\sqrt{3}}{2} - \tfrac{9}{\pi} - 3 - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)dx = 4\left(3 - \tfrac{9}{\pi}\right).$

Вычислим:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{2y}{\pi}\cos\tfrac{\pi x}{y} + x + x\sin\tfrac{\pi x}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2y + y\sin\tfrac{\pi x}{y}\right) =$$

$$= 2\sin\tfrac{\pi}{y} - 1 - \sin\tfrac{\pi x}{y} - \tfrac{\pi x}{y}\cos\tfrac{\pi x}{y} - 2 - \sin\tfrac{\pi x}{y} + \tfrac{\pi x}{y}\cos\tfrac{\pi x}{y} = -3.$$

Следовательно, $\displaystyle\iint\limits_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D (-3)\,dxdy = -3S(D) = -3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 10\pi = -15\pi.$

В нашем случае имеет первый случай формулы (8):

$$\int\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \iint\limits_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 4\left(3 - \tfrac{9}{\pi}\right) - 15\pi.$$

4. Потенциальные и безвихревые поля на плоскости

4.1. Основные определения

Напомним, что **градиент** плоского скалярного поля $U(x, y)$ – это векторное поле $\boldsymbol{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}$. Как известно, градиент скалярного поля $U(x, y)$ в каждой точке ортогонален линии уровня[12] поля $U(x, y)$, проходящей через эту точку. ***Вихрем*** или ***ротором*** плоского векторного поля $\boldsymbol{G}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ в данной точке M_0 называется плотность циркуляции этого поля в этой точке, т.е.

$$rot\boldsymbol{G}\Big|_{M_0} \underset{def}{=} \lim_{D \to M_0} \frac{1}{S(D)} \oint\limits_{\partial D} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l},$$

где запись $D \to M_0$ означает, что область D ***стягивается в точку*** M_0, т.е. что $M_0 \in D$ и $\delta(D) \to 0$, где $\delta(D)$ – диаметр[13] множества D, $S(D)$ – площадь области D.

Заметим, что ротор **плоского** векторного поля представляет собой **скалярное** поле. Ротор векторного поля показывает степень его «закрученности». Положительные значения ротора (вихря) означают закрученность в положительном направлении (против часовой стрелки), отрицательные значения ротора (вихря) – закрученность в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

С помощью формулы Грина можно доказать, что в любой точке ротор плоского поля равен

$$rot\boldsymbol{G} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial O}{\partial y}.$$

Тогда саму формулу Грина можно кратко записать так:

$$\oint\limits_{\partial D} \boldsymbol{G} \bullet d\boldsymbol{l} = \iint\limits_{D} rot\boldsymbol{G}\, dxdy\,\textbf{.}$$

Заметим также, что для любого скалярного поля $U(x, y)$, чьи смешанные частные производные второго порядка непрерывны,

$$rot\,(\,\boldsymbol{grad}\,U\,) \equiv 0 \qquad (9).$$

Векторное поле $\boldsymbol{F} = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ называется ***потенциальным*** в области $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, если оно является градиентом некоторого скалярного поля

---

[12] ***линия уровня*** скалярного поля $U(x, y)$ – линия, вдоль которой это поле сохраняет постоянное значение. Семейство линий уровня задается уравнением $U(x, y) = C$, где $C = const$.

[13] ***Диаметр*** множества D – это точная верхняя грань расстояний между любыми двумя точками множества D, т.е. $\delta(D) = \sup\limits_{A,\, B \in D} |AB|$. Диаметр существует у любого ограниченного множества, а в случае замкнутого множества в определении диаметра точную верхнюю грань можно заменить на максимум: $\delta(D) = \max\limits_{A,\, B \in D} |AB|$.

$U(x,y)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}U$, т.е. во всех точках области Ω справедливы равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

Потенциал такого поля определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной, т.е. если $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}\,U_1 = \boldsymbol{grad}\,U_2$, то

$$U_1(x,y) - U_2(x,y) \equiv C = const.$$

Вызывает интерес случай, когда плоское векторное поле, заданное в некоторой односвязной или многосвязной области $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ таково, что во всех точках области Ω $rot\,\boldsymbol{F} = 0$, т.е. выполняется тождество $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$

Такое векторное поле называется ***безвихревым*** в области Ω. Очевидно, что в силу (9), всякое потенциальное плоское поле на плоскости является безвихревым. Обратное не всегда верно.

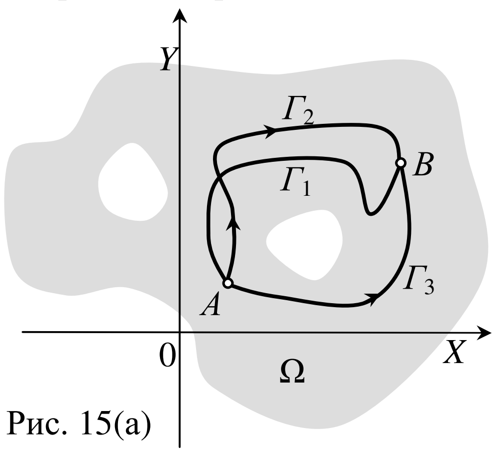

Рис. 15(а)

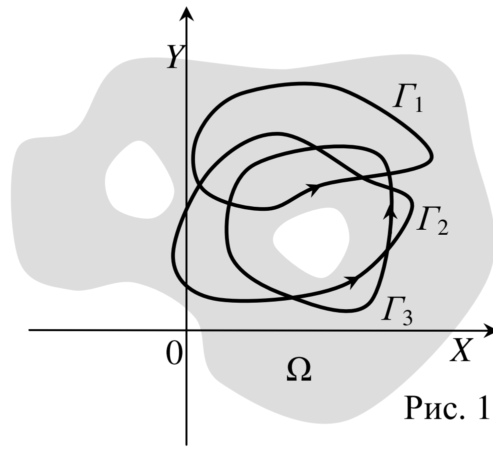

Рис. 15(б)

Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ даны две точки A и B. Два ориентированных пути Γ_1 и Γ_2, ведущих из точки A в точку B, или два замкнутых контура Γ_1 и Γ_2 в области Ω, называются ***эквивалентными*** относительно области Ω, если один из этих путей можно непрерывной деформацией преобразовать в другой, не выходя из области Ω. Если эти два пути не имеют общих точек, кроме A и B, то это равносильно тому, что замкнутый контур $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, ограничивает область D, целиком лежащую в Ω. Замкнутый контур Г называется эквивалентным нулю относительно области Ω, или стягиваемым к нулю. Если область Ω односвязна, то для любых её точек A и B любые два пути, ведущие из A в B эквивалентны, и любые два замкнутых пути тоже эквивалентны.

Например, на рис. 15(а) в области Ω из точки A в точку B ведут три пути: Γ_1, Γ_2 и Γ_2, причем первые два пути эквивалентны между собой относительно области Ω, но не эквивалентны третьему. На рис. 15(б) в области Ω лежат три замкнутых контура Γ_1, Γ_2 и Γ_2, из которых последние два эквивалентны между собой относительно области Ω, но не эквивалентны первому. Первый контур можно стянуть в точку относительно Ω, а второй и третий – нет.

4.2. Свойства плоских потенциальных и безвихревых полей.

Теорема 2. *Пусть в области* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ *задано плоское потенциальное поле* $\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ *т.е. такое, что для некоторого скалярного поля* $U(x,y)$ *(**потенциала** поля **F**) в области Ω справедливы тождества:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv P(x,y), \frac{\partial U}{\partial y} \equiv Q(x,y),$$

и частные производные функций $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны в области Ω. Тогда:*

(а) *векторное поле **F** является безвихревым в области Ω, т.е.* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$;

(б) *циркуляция поля **F** по любому замкнутому контуру равна нулю;*

(в) *работа поля по любому пути в области Ω, ведущему из точки A в точку B, не зависит от формы пути и равна разности потенциалов:*

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{dl} = \int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A). \qquad (10)$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона – Лейбница*** для криволинейных интегралов.

В этом случае применяют и несколько иную терминологию. Тот факт, что векторное поле $\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ потенциально и имеет потенциал $U(x,y)$ означает, что форма $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции, а именно $U(x,y)$, т.е. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU$, поэтому теорему 2 можно переформулировать так:

криволинейный интеграл от полного дифференциала по любому замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_{\Gamma} dU = 0,$$

а по незамкнутому пути не зависит от формы пути, соединяющего две данные точки A и B, и вычисляется по формуле: Ньютона – Лейбница:

$$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_A^B dU = U(B) - U(A).$$

Следующая теорема описывает свойства плоских безвихревых полей.

Теорема 3. *Пусть в области* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ *задано плоское безвихревое векторное поле* $\boldsymbol{G}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$, *т.е. во всех точках области Ω выполняется тождество* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$. *Тогда:*

(а) *Если два пути Γ_1 и Γ_2 эквивалентны относительно области Ω, то работа поля* $\boldsymbol{G}$ *по пути Γ_1 равна работе поля* $\boldsymbol{G}$ *по пути Γ_2:*

$$\Gamma_1 \underset{\Omega}{\sim} \Gamma_2 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{G} \bullet d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{G} \bullet d\boldsymbol{l}\,;$$

(б) *Если замкнутый контур Γ лежит в области Ω и его можно стянуть в ноль относительно области Ω, то циркуляция поля* $\boldsymbol{G}$ *по контуру Γ равна нулю;*

(в) если область Ω односвязна, то поле $\boldsymbol{G}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ потенциально, и поэтому обладает всеми свойствами потенциального поля.

4.3. Нахождение потенциала и вычисление работы плоского потенциального поля

Если в односвязной области Ω. векторное поле $\boldsymbol{G}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ является безвихревым, то это поле потенциально. Покажем, как надо находить потенциал такого поля.

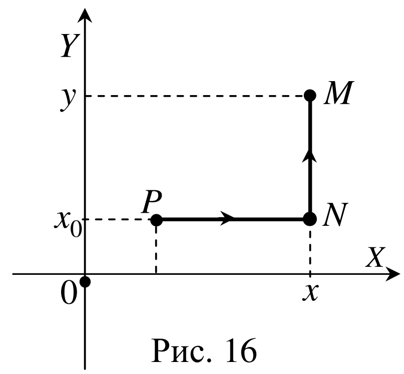

Рис. 16

Первый способ. Взять любую точку $P(x_0;\, y_0)$, в которой будем считать, что $U(P) = 0$, и тогда потенциал в другой произвольной точке $M(x,\, y)$ равен работе поля $\boldsymbol{G}$ по любому пути (расположенному в области Ω), ведущему от P к M, например, по отрезку прямой PM, или по двухзвенной ломаной PNM, где отрезки PN и NM параллельны координатным осям. Если, например, отрезок PN параллелен оси OX, а NM параллелен оси OY, см. Рис. 16, то точка N имеет координаты $N(x;\, y_0)$, и тогда:

$$U(M) = U(x;\, y) = \int\limits_P^M \boldsymbol{G}\bullet d\boldsymbol{l} = \int\limits_P^N \boldsymbol{G}\bullet d\boldsymbol{l} + \int\limits_N^M \boldsymbol{G}\bullet d\boldsymbol{l} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt \qquad (11).$$

Второй способ. Поскольку для искомого потенциала $U(x,y)$ $\dfrac{\partial U}{\partial x} \equiv P(x,y), \dfrac{\partial U}{\partial y} \equiv Q(x,y)$, то $U(x,y) = \underbrace{\int P(x,y)\,dx}_{y=const} = F(x,y) + C(y)$**.** Для нахождения функции $C(y)$ надо найти $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \left(F(x,y)\right)'_y + C'(y)$ и приравнять последнее выражение функции $Q(x,y)$, откуда найти $C'(y)$, а после интегрирования – и саму функцию $C(y)$.

Пример 8. Проверить, что векторное поле $\boldsymbol{F} = (x^2 - 2y)\boldsymbol{i} + (y^3 - 2x)\boldsymbol{j}$ является потенциальным во всей плоскости, и найти его потенциал.

Решение. Здесь $P(x,y)=x^2-2y$, $Q(x,y)=y^3-2x$, поле определено во всех точках плоскости, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и поэтому поле $\boldsymbol{F}$ является безвихревым, и поскольку вся плоскость $\mathbf{R}^2$, очевидно односвязна, то и потенциальным.
Применим **первый** способ. Возьмем, например, $P(0;1)$. Тогда, по формуле (11),

$$U(x,y)=\int_0^x P(t,1)\,dt+\int_1^y Q(x,t)\,dt=\int_0^x (t^2-2)\,dt+\int_1^y (t^3-2x)\,dt=$$

$$=\left(\tfrac{1}{3}t^3-2t\right)\Big|_{t=0}^{t=x}+\left(\tfrac{1}{4}t^4-2xt\right)\Big|_{t=1}^{t=y}=\tfrac{1}{3}x^3-2x+\tfrac{1}{4}y^4-2xy-\tfrac{1}{4}+2x=$$

$$=\tfrac{1}{3}x^3-2xy+\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{4}.$$

Поскольку потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной, то $U(x,y)=\frac{1}{3}x^3-2xy+\frac{1}{4}y^4+C$.

Применим **второй** способ**.** Для потенциала $U(x,y)$ выполняются равенства:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)=x^2-2y,\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)=y^3-2x.$$

Тогда:

$$U(x,y)=\int P(x,y)\,dx\Big|_{y=\cos t}=\int\left(x^2-2y\right)dx\Big|_{y=\cos t}=\tfrac{1}{3}x^3-2xy+C(y).$$

Далее,

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\tfrac{1}{2}x^3-2xy+C(y)\right)'_y=-2x+C'(y)=Q(x,y)=y^3-2x,$$

Откуда $C'(y)=y^3 \Rightarrow C(y)=\frac{1}{4}y^4+\overline{C}$.

Итак, потенциал $U(x,y)=\frac{1}{3}x^3-2xy+\frac{1}{4}y^4+C$.

Работу плоского безвихревого (в частности, потенциального) в области Ω поля $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ по некоторому пути из точки A в точку B можно найти также двумя способами.
Первый способ. Взять произвольный наиболее удобный путь из точки A в точку B, эквивалентный данному пути относительно области Ω, например, отрезок прямой, или ломаную ACB, звенья которой параллельны координатным осям (если поле потенциально, то выбираем любой путь из A в B, можно и не эквивалентный данному). В последнем случае, если точка A и B имеют координаты $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$ и например, отрезок AC параллелен оси OY, а CB параллелен OX, то точка С имеет координаты $C(x_1;\,y_2)$, и тогда:

$$\int_A^B P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_A^B \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{l}=\int_{A(x_1;\,y_1)}^{C(x_1;\,y_2)}\boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{l}+\int_{C(x_1;\,y_2)}^{B(x_2;\,y_2)}\boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{l}=$$
$$=\int_{y_1}^{y_2}Q(x_1,y)dy+\int_{x_1}^{x_2}P(x,y_2)dx. \qquad (12)$$

Второй способ. Если потенциал $U(x,y)$ данного векторного поля $\boldsymbol{F}$ еще не известен, то его следует найти (лучше вторым способом). Если потенциал $U(x,y)$ уже известен, то

$$\int_A^B P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_A^B \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{l}=U(B)-U(A).$$

Упражнение 5. Напишите формулу для вычисление работы потенциального поля первым способом по ломаной *ACB*, если отрезки *AC* и *CB* параллельны осям *OX* и *OY* соответственно.

Пример 9. Вычислить интеграл второго рода

$$\int_\Gamma (x^2-2y)dx+(y^3-2x)dy$$

по дуге *Г* окружности, проходящей через начало координат, от точки $A(1;2)$ до точки $B(4;-1)$.

Решение. Векторное поле $\boldsymbol{F}=(x^2-2y)\boldsymbol{i}+(y^3-2x)\boldsymbol{j}$, как мы уже убедились в примере 8, потенциально на всей плоскости, или, на другом языке, подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Поэтому данный интеграл (работа поля $\boldsymbol{F}$) по пути из точки *A* в точку *B*) не зависит от формы пути. Вычислим этот интеграл по ломаной *ACB*, где $C(1;-1)$, см. Рис. 17, с помощью формулы (12):

$$\int_{A(1;\,2)}^{B(4;\,-1)}(x^2-2y)dx+(y^3-2x)dy=\int_2^{-1}(y^3-2)\,dy+\int_1^4(x^2+2)\,dx=$$
$$=\left(\tfrac14 y^4-2y\right)\Big|_{y=2}^{y=-1}+\left(\tfrac13 x^3+2x\right)\Big|_{x=1}^{x=4}=29\tfrac14.$$

Проверим наши вычисления по формуле Ньютона – Лейбница. Потенциал данного векторного поля $\boldsymbol{F}$ мы также уже нашли в том же примере 8: $U=\frac13x^3-2xy+\frac14y^4$. Значит,

$$\int_{A(1;\,2)}^{B(4;\,-1)}(x^2-2y)dx+(y^3-2x)dy=\int_A^B dU=U(B)-U(A)=$$
$$=U(4;-1)-U(1;2)=29\tfrac14.$$

4.4. Вычисление циркуляции плоского безвихревого поля в многосвязной области

Пусть векторное поле $\boldsymbol{G}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ является безвихревым во всех точках некоторой односвязной плоской области Ω, кроме нескольких ***особых*** точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в которых данное поле не определено. Согласно свойству (1), циркуляция данного поля по любому замкнутому контуру, один раз охватывающему только одну из этих точек P_k в **положительным** направлении (**против** часовой стрелки), равна одному и тому же значению C_k, называемому ***циклической постоянной*** этого поля в данной точке. Чтобы вычислить эту постоянную, надо взять достаточно маленький контур простой формы, например, окружность, охватывающую только эту точку. Для произвольного замкнутого контура *Г* надо определить, сколько раз и в каком направлении (положительном или отрицательном) он обходит каждую из особых точек P_k. Тогда циркуляция по этому контуру равна:

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{G} \bullet d\boldsymbol{l} = n_1 \cdot C_1 + n_2 \cdot C_2 + \ldots + n_k \cdot C_k,$$

где C_k – циклическая постоянная особой точки P_k, а n_k – целое число (положительное, отрицательное или ноль), равное числу обходов контура *Г* вокруг точки P_k, $k = 1, \ldots, n$.

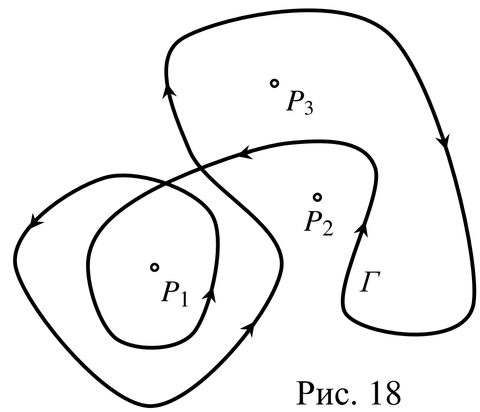

Рис. 18

Например, на Рис. 18 замкнутый контур *Г* **два** раза охватывает точку P_1 в **положительном** направлении, **ноль** раз охватывает точку P_2, и **один** раз точку P_3 в **отрицательном** направлении. Если особые точки P_1, P_2 и P_3 безвихревого поля $\boldsymbol{G}$ имеют циклические постоянные C_1, C_2 и C_3 соответственно, то циркуляция поля $\boldsymbol{G}$ по контуру *Г* равна:

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{G} \bullet d\boldsymbol{l} = 2 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 - 1 \cdot C_3.$$

Пример 10. Найти работу векторного поля

$$\boldsymbol{F} = \frac{3x - y}{x^2 + y^2} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} \cdot \boldsymbol{j}$$

вдоль замкнутой кривой $\mathcal{L}$ $x = 1 + 2\cos t$, $y = \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$ в направлении возрастания параметра *t*.

Решение. Данное векторное поле определено во всех точках плоскости *XOY*, кроме начала координат. Для этого поля

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{x + 3y}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{y^2 - 6xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \left(\frac{3x - y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

поэтому оно является безвихревым в двусвязной области $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$. Данная линия $\mathcal{L}$ имеет форму расположенной горизонтально восьмерки (как символ бесконечности) и является одной из так называемых **фигур Лиссажу**[14] (см. Рис. 19), она охватывает начало координат один раз в отрицательном направлении[15].

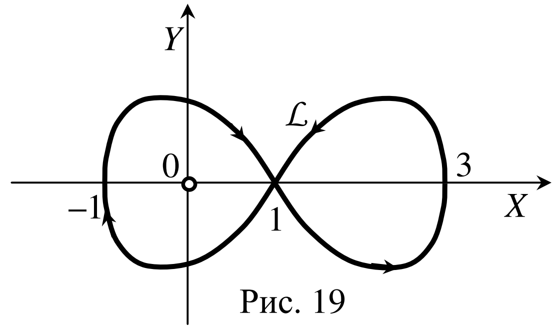

Рис. 19

Вычислим циклическую постоянную поля $\boldsymbol{F}$ в начале координат, т.е. работу поля $\boldsymbol{F}$ по окружности Γ радиуса 1 с центром в начале координат, при обходе её в положительном направлении: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ t$ изменяется от $t=0$ до $t=2\pi$. Тогда

$$P=3\cos t-\sin t, Q=\cos t+3\sin t,\quad dx=-\sin t\cdot dt, dy=\cos t\cdot dt,$$

поэтому, циклическая постоянная равна

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\tfrac{3x-y}{x^2+y^2}dx+\tfrac{x+3y}{x^2+y^2}dy=\int\limits_0^{2\pi}\big((3\cos t-\sin t)(-\sin t)+(\cos t+3\sin t)\cdot\cos t\big)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}1\cdot dt=2\pi.$$

Следовательно, циркуляция этого поля по контуру $\mathcal{L}$ равна $-C=-2\pi$.

Если область Ω, в которой задано плоское безвихревое векторное поле, не односвязна, то можно рассмотреть её некоторую односвязную подобласть Ω_1, и в ней, по теореме 3, данное поле уже будет потенциальным.

Пример 11. Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{F}=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}\cdot\boldsymbol{i}+\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}\cdot\boldsymbol{j}$ из предыдущего примера в области Ω_1, заданной неравенством $x>0$. Эта область односвязна, и поэтому данное безвихревое поле в нем потенциально. Можно проверить, что потенциалом поля $\boldsymbol{F}$ в данной области является функция $U(x,y)=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, поскольку $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$. Поэтому работу данного поля по любому замкнутому

---

[14] Фигура Лиссажу – траектория, прочерчиваемая точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, т.е. это плоская линия, заданная параметрически уравнениями вида $x=a\cos(mt+\varphi),\ y=b\cos(nt+\theta)$, где a,b,m,n,φ,θ – параметры. Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на осциллографе.

[15] Методы исследования и построения плоских кривых, заданных параметрически и в полярных координатах, с применением элементарной математики, теории предела и дифференциального исчисления, изложены в работе [5] В первом приближении эту кривую можно построить по точкам.

контуру, расположенному в области Ω_1, равна нулю, а работа по любому пути из точки A в точку B, целиком лежащему в Ω_1, не зависит от формы пути и может быть найдена по формуле Ньютона – Лейбница. Например,

$$\int\limits_{A(\sqrt{3};-1)}^{B(2;2)} \tfrac{3x-y}{x^2+y^2}dx + \tfrac{x+3y}{x^2+y^2}dy = U(2;2) - U(\sqrt{3};-1) =$$

$$= \tfrac{3}{2}\ln 8 + \operatorname{arctg} 1 - \tfrac{3}{2}\ln 4 + \operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{3}{2}\ln 2 + \tfrac{5}{12}\pi.$$

Ответы к упражнениям:

1. $\int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f\left(x(y),y\right)\cdot\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\cdot dy$

2. $d = \dfrac{2R}{\pi}$.

3. $\boldsymbol{F} = \int\limits_{\mathcal{L}} \mu(x,y,z)\cdot \boldsymbol{E}(x,y,z)\,dl$.

4. $\int\limits_{\mathcal{L}} \boldsymbol{G}(x,y)\bullet d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d}\Big(P(x(y),y)\cdot x'(y) + Q(x(y),y)\Big)\cdot dy.$

5. $\int\limits_{A(x_1;\,y_1)}^{B(x_2;\,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x,y_1)dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y)dy.$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода.
2. Сформулируйте свойства криволинейного интеграла первого рода.
3. Какие геометрические приложения имеет криволинейный интеграл первого рода?
4. Какие физические приложения имеет криволинейный интеграл первого рода?
5. Как вычисляется криволинейный интеграл первого рода вдоль линии, заданной: (а) параметрически; (б) явно на плоскости; (в) в полярных координатах?
6. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.
7. Зависит ли от ориентации кривой: (а) интеграл первого рода; (б) интеграл второго рода?
8. Сформулируйте свойства криволинейного интеграла второго рода.

9. Что такое (а) связная плоская область; (б) односвязная плоская область? Приведите примеры.
10. Что такое циркуляция векторного поля? Как она обозначается?
11. Сформулируйте теорему Грина.
12. Какие приложения имеет формула Грина.
13. Что такое: градиент скалярного поля? Какими свойствами он обладает?
14. Что такое ротор плоского векторного поля?
15. Как можно записать формулу Грина с помощью ротора?
16. Что такое потенциальное векторное поле?
17. Что такое безвихревое плоское векторное поле?
18. Какие два пути называются эквивалентными относительно данной плоской области?
19. Какими свойствами обладает плоское потенциальное векторное поле?
20. Какими свойствами обладает плоское безвихревое векторное поле?
21. Что такое потенциал векторного поля? Для каких векторных полей существует потенциал? Какие способы его нахождения вы знаете?
22. Напишите формулу Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла. В каком случае она справедлива?
23. Чем отличаются: «криволинейный интеграл второго рода от полного дифференциала» и «работа потенциального векторного поля»?
24. Какие способы вы знаете вычисления криволинейный интеграл второго рода от полного дифференциала по незамкнутому пути.
25. В каких случаях циркуляция векторного поля заведомо равна нулю?
26. Что такое циклическая постоянная плоского безвихревого векторного поля? Где она применяется?

Литература.

1. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Серия «Математика в техническом университете», вып. 9. М.: МГТУ, 2001.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. Т. 4. М.: УРСС, 2000.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 2. М.: Дрофа, 2003.
4. Мельников Д.А., Неклюдов А.В., Титов К.В. Криволинейные и поверхностные интегралы. Методические указания к выполнению типового расчета. МГТУ, 2002.
5. Соболев С. К., Ильичев А. Т. Исследование и построение плоских кривых, заданных параметрически и в полярных координатах. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 80 с.

Содержание