# Оглавление

# Введение

В методических указаниях излагаются основы математической статистики в соответствии с программой этого курса для технических и экономических специальностей вузов. Изложение ведется в строгой, но доступной пониманию форме. Основные понятия иллюстрируются различными примерами практического содержания. В методических указаниях достаточно полно освещены основные положения математической статистики в соответствии с программой, утвержденной Минобразованием. Оно предназначено для студентов технических и экономических специальностей вузов. Методические указания посвящены математической статистике и некоторым ее применениям в технике и экономике и в других исследованиях. В ней изложены основы выборочного метода, теории оценивания вероятностных параметров.

# 1. Выборка и ее характеристики

## 1.1. Эмпирическая функция распределения

Исходным материалом для всякого статистического исследования служит совокупность из $n$ наблюдений, в результате которых случайная величина $X$ приняла значение $x_1,\ldots,x_n$. В дальнейшем предполагаем, что испытания взаимно независимы и произведены в неизменных условиях. Функция распределения $F(x)$ случайной величины $X$ неизвестна.

Известно лишь, что $F(x)$ принадлежит некоторому классу распределений $\Theta$.

Набор наблюдений $x_1,\ldots,x_n$ называется повторной выборкой объема $n$ из совокупности $\Theta$ (или просто выборкой, если ясно о чем идет речь). При решении статистических задач будем использовать различные функции от наблюдений.

*Определение.* Любая функция от результатов наблюдения называется статистикой.

Если статистика используется (или хотя бы претендует на использование) для оценивания, то о ней говорят как об оценке.

Рассмотрим выборку $x_1,\ldots,x_n$. Перегруппировав элементы выборки путем расстановки их в возрастающем порядке так, что

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)},$$

получим упорядоченную выборку, которая называется вариационным (или статистическим) рядом; величины $x_{(i)}$ называют порядковыми статистиками.

Обозначим $\nu_n(x)$ — число выборочных значений не превосходящих $x$.

Функция $F_n^*(x) = \dfrac{\nu_n(x)}{n} = \dfrac{\text{число тех} \quad , \quad x_i \text{ для которых} \quad x_i < x}{n}$ представляет частоту события $\{X < x\}$ в последовательности $n$ наблюдений. Ее называют эмпирической функцией распределения выборки.

График функции распределения имеет вид (рисунок 1).

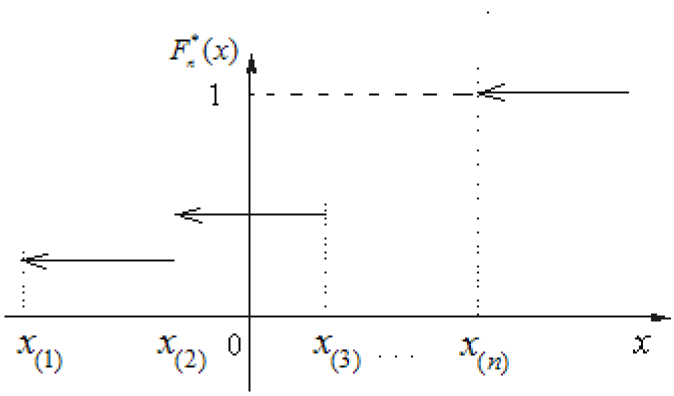


Рисунок 1 – График функции распределения

Эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами распределения:

1) $0 \le F_n^*(x) \le 1$,

2) $F_n^*(x)$ – неубывающая кусочно-постоянная функция.

Она является естественной оценкой теоретической функции распределения $F(x)$ (но не совпадает с последней). Если все $x_i$ различны, то скачки эмпирической функции распределения равны $\frac{1}{n}$ и $F(x_{(j)}) = \frac{j}{n}$. В общем случае скачок функции $F_n^*(x)$ в точке $x_{(i)}$ равен

$$\frac{n_j}{n} = \frac{\text{число тех} \quad x_i, \quad \text{для которых} \;\; x_i = x_j}{n}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Покажем, что при $n \to \infty$, $F_n^*(x)$ сходится по вероятности к $F$.

*Теорема 1*. Для $\tilde{o} \in \mathrm{R}$ и любого $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\left|F_n^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon) = 1.$$

*Теорема Гливенко*. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины $X$ и $F_n^*(x)$ - эмпирическая функция распределения результатов $n$ независимых наблюдений над величиной $X$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n^*(x) - F(x)\right| \to 0\right) = 1. \qquad (1.1)$$

Видим, что эта теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1.

Теорема Гливенко устанавливает важный факт сближения эмпирической функции распределения с теоретической, но не устанавливает, с какими вероятностями могут возникать те или иные уклонения. Возникает задача определения функции распределения величины

$$D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n^*(x) - F(x)\right|.$$

Решение этой задачи было дано в 1933 г. Колмогоровым в виде следующей теоремы.

*Теорема Колмогорова*. Если $F(x)$ непрерывна, то при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\{\sqrt{n}D_n < z\} \to k(z) = \begin{cases} 0, z \le 0; \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2}, z > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Теорема Колмогорова позволяет указать границы, в которых с большой вероятностью будет заключена неизвестная функция распределения $F(x)$. Если $Z_\alpha$ подобрано так, что $1-k(Z_\alpha) = \alpha$, то неравенство

$$F_n^*(x) - \frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}} < F(x) < F_n^*(x) + \frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

выполняется сразу для всех $x$ с вероятностью, близкой к $1-\alpha$. Действительно,

$$\mathrm{P}(\sqrt{n}D_n < Z_\alpha) = \mathrm{P}(\sqrt{n}\sup\left|F_n^*(x) - F(x)\right| < Z_\alpha) =$$
$$= \mathrm{P}(\forall x: F_n^*(x) - \frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}} < F(x) < F_n^*(x) + \frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}}) \approx k(Z_\alpha) = 1-\alpha.$$

В случае, когда объем выборки очень велик, выборочные значения часто подвергают группировке. Область возможных значений случайной величины (СВ) разделяют на $N$ непересекающихся интервалов и объединяют выборочные значения, попадающие в один и тот же интервал, при этом считают все выборочные значения, попавшие в данный интервал, равными середине интервала.

Статистическим аналогом плотности распределения непрерывной СВ $X$ может служить гистограмма, которая строится по выборке $x_1, \ldots, x_n$ следующим образом. Интервал $I$, содержащий наблюдения, разбивают на $N$ (обычно равных) интервалов $h_i$ и полагают при $\tilde{o} \in h_i$

$$p_n^*(x) = \frac{\text{число тех } i, \text{ для которых } x_i \in h_i}{nh_i}.$$

График "эмпирической плотности" $p_n^*(x)$ обычно называют гистограммой. Основанием для введения такой оценки служат приближенное равенство

$$\mathrm{P}(x \in h_i) = \int_{h_i} p(x)dx \approx p(x)h_i,$$

справедливое для $\tilde{o} \in h_i$ и малых $|h_i|$.

## 1.2. Эмпирические (выборочные) моменты

Эмпирическая функция распределения содержит всю статистическую информацию, которая накоплена в процессе извлечения выборки. Статистические свойства выборки можно характеризовать не только эмпирической функцией распределения (ФР), но и более грубо — выборочными моментами. Выборочные моменты будем обозначать звездочкой (в отличие от моментов СВ).

Выборочный момент $k$-го порядка определяется по формуле

$$\grave{a}_k^* = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^k, \tag{1.3}$$

т.е. он равен среднему арифметическому $k$-х степеней выборочных значений.

Выборочный момент первого порядка

$$\grave{a}_1^* = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i \tag{1.4}$$

называется выборочным средним.

Выборочные моменты $k$-го порядка служат оценкой моментов $k$-го порядка СВ $X$. Аналогично оценкой $k$-го центрального момента $\alpha_k = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)^k$ служат выборочные моменты

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \overline{x})^k. \tag{1.5}$$

В случае $k = 2$, получаем выборочную дисперсию

$$\alpha_2^* = s^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2. \tag{1.6}$$

Выборочное среднее характеризует расположение выборки на действительной прямой; выборочная дисперсия является мерой рассеяния выборочных значений относительно среднего. Можно показать, что при достаточно общих ограничениях на неизвестную функцию распределения $F(x)$ выборочные моменты близки к соответствующим теоретическим характеристикам $F(x)$:

$$\alpha_k = \mathrm{M}\tilde{O}^k;\ \alpha_k = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}X)^k.$$

Найдем сначала математическое ожидание и дисперсию выборочных моментов. Так как $x_k$ – независимы и распределены так же, как и $X$, то:

$$\mathrm{M}\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n \mathrm{M}x_k = \mathrm{M}X = a_1, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{D}\bar{x} = \frac{1}{n^2}\sum_1^n \mathrm{D}x_k = \frac{\mathrm{D}X}{n} = \frac{\alpha_2}{n}. \tag{1.8}$$

Таким образом, $\mathrm{M}\bar{x} = a_1$, $\mathrm{D}\bar{x} = \dfrac{\alpha_2}{n}$.

Аналогично находим,

$$\mathrm{M}a_k^* = a_k,\ \mathrm{D}a_k^* = \frac{a_{2k} - a_k^2}{n}. \tag{1.9}$$

Действительно:

$$\mathrm{M}a_k^* = \mathrm{M}\frac{1}{n}\sum x_i^k = \frac{1}{n}\sum \mathrm{M}x_i^k = \mathrm{M}x^k = a_k,$$

$$\mathrm{D}a_k^* = \mathrm{D}\frac{1}{n}\sum x_i^k = \frac{1}{n^2}\sum \mathrm{D}x_i^k = \frac{1}{n}\mathrm{D}X_k = \frac{1}{n}(\mathrm{M}X^{2k} - (\mathrm{M}X^k)^2) =$$

$$= \frac{1}{n}(a_{2k} - a_k^2).$$

Несколько сложнее вычисляются математическое ожидание и дисперсии центральных выборочных моментов. Ограничимся вычислением $\mathrm{M}\bar{S}^2$ и $\mathrm{D}\bar{S}^2$.

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_k - \bar{x})^2 =^{(1)} \frac{1}{n}\sum (y_k - \bar{y})^2 =^{(2)} \frac{1}{n}\sum y_k^2 - \bar{y}^2. \tag{1.10}$$

$$y_k = x_k - \mathrm{M}x_k, \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i,$$

$$\sum_1^n (y_k - \bar{y}) = \sum (x_k - \mathrm{M}x_k - \frac{1}{n}\sum (x_k + \mathrm{M}x_k))^2 =$$

$$= \sum_1^n (x_k - \frac{1}{n}\sum x_k - (\mathrm{M}x_k - \frac{1}{n}\mathrm{M}x_k))^2 = \sum_1^n (x_k - \bar{x})^2.$$

$$\frac{1}{n}\sum_1^n (y_k - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum (y_k^2 - 2y_k\bar{y} + \bar{y}^2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum y_k^2 - \frac{2}{n}\bar{y}\sum y_k + \frac{1}{n}\bar{y}^2 n = \frac{1}{n}\sum y_k^2 - 2\bar{y}^2 + \bar{y}^2.$$

Так как

$$\mathrm{M}y_k = \mathrm{M}(X_k - \mathrm{M}X_k) = 0,$$
$$\mathrm{M}y_k^2 = \mathrm{M}(X_k - \mathrm{M}X_k)^2 = \alpha_2,$$
$$\mathrm{M}y_k y_l = \mathrm{M}y_k \mathrm{M}y_l = 0,\ (k \neq l),\ \text{òî}$$
$$\mathrm{M}\bar{y}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^n \mathrm{M}y_k y_l = \frac{\alpha_2}{n}.$$

Из последней формулы и (1.10) находим, что

$$\mathrm{M}\bar{S}^2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2}{n} = \frac{n-1}{n}\alpha_2. \tag{1.11}$$

В формуле (1.11) правая часть смещена относительно $\alpha^2$. Если вместо $\overline{S}^2$ ввести величину

$$\overline{S}_1^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_k - \overline{x})^2,$$

то для нее получим $\mathrm{M}\overline{S}_1^2 = \alpha_2$.

Перейдем к вычислению $\mathrm{D}\overline{S}^2$. Из (1.10) находим

$$\overline{S}^4 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_1^n y_k^2\right)^2 - 2\overline{y}^2\left(\frac{1}{n}\sum y_k^2\right) + \overline{y}^4. \tag{1.12}$$

Так как случайные величины $y_k,\ k = 1\ldots n$ независимы и $\mathrm{M}y_k = 0$, то в правой части равенства

$$\mathrm{M}\overline{y}^4 = \frac{1}{n^4}\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{n} \mathrm{M}y_{l_1}y_{l_2}y_{l_3}y_{l_4}$$

отличны от нуля только слагаемые $\mathrm{M}\overline{y}^4 = \alpha_4$ (их $n$) и слагаемые $\mathrm{M}y_l^2 y_k^2 = \alpha_l^2, l \neq k$ (которых $C_n^2 C_4^2 = 3n(n-1)$). Поэтому

$$\mathrm{M}\overline{y}^4 = \frac{\alpha_4 + 3(n-1)\alpha_2^2}{n^3}.$$

Аналогично находим $n\mathrm{M}\left(\frac{\left(\sum y_k^2\right)^2}{n}\right) = n^2\mathrm{M}\left(\frac{1}{n}\overline{y}^2\left(\sum y_k^2\right)\right) = \alpha_4 + (n-1)\alpha_2^2.$

Отсюда и из (1.12) по формуле $\mathrm{D}\overline{S}^2 = \mathrm{M}\overline{S}^4 - (\mathrm{M}\overline{S}^2)^2$ получаем

$$\mathrm{D}\overline{S}^2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_2^2}{n} - \frac{2(\alpha_4 - 2\alpha_2^2)}{n^2} + \frac{\alpha_4 - 3\alpha_2^2}{n^3}.$$

Можно показать, что $\mathrm{M}\alpha_\nu^* = \alpha_\nu + k\left(\frac{1}{n}\right),\ \mathrm{M}(\alpha_\nu^* - \alpha_\nu)^k = k\left(\frac{1}{n^k}\right).$

*Теорема.* Если конечен теоретический момент $a_{2k}$, то выборочный момент $k$-го порядка $a_{2k}^*$ сходится по вероятности, когда размер выборки неограниченно возрастает к соответствующему $k$-му моменту исходного распределения.

## 1.3. Примеры решения задач

**Задача №1.**

Вычислить несмещенные оценки среднего значения $\mu$, дисперсии $\sigma^2$ и стандартного отклонения σ генеральной совокупности $\overline{x}$, $S^2$, $S$ по выборкам (43, 51, 44, 47, 34) и (52, 42, 40, 38, 37).

**Решение:**

Для нахождения $\overline{x}$, $S^2$, $S$ используем формулы:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 ,$$

$$S = \sqrt{S^2} .$$

Вычисления сумм оформим в таблицы 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

| $i$ | $x_i$ | $x_i - \overline{x}$ | $(x_i - \overline{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 52 | 10.2 | 104.04 |
| 2 | 42 | 0.2 | 0.04 |
| 3 | 40 | -1.8 | 3.24 |
| 4 | 38 | -3.8 | 14.44 |
| 5 | 37 | -4.8 | 23.04 |
| $\sum$ | 209 | — | 144.8 |

Т а б л и ц а 2

| $i$ | $x_i$ | $x_i - \overline{x}$ | $(x_i - \overline{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 43 | -0.8 | 0.64 |
| 2 | 51 | 7.2 | 51.84 |
| 3 | 44 | 0.2 | 0.04 |
| 4 | 47 | 3.2 | 10.24 |
| 5 | 34 | -9.8 | 96.04 |
| $\sum$ | 219 | — | 158.8 |

$$\overline{x} = \frac{219}{5} = 43.8,$$

$$S^2 = \frac{158.8}{5} = 31.76,$$

$$S = \sqrt{31.76} = 5.64,$$

$$\overline{x} = \frac{209}{5} = 41.8,$$

$$S^2 = \frac{148.8}{5} = 29.76,$$

$$S = \sqrt{29.76} = 5.45.$$

**Задача №2**

Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\overline{x}$, $S^2$, $S$ по трем выборкам: $x$ =(82, 70, 83, 80, 76, 81, 80, 76, 70, 79, 74, 77, 65, 80, 79), $y$ =(-237, -209, -243, -239, -221, -238, -238, -223, -207, -237, -216, -228, -193, -234, -229), $z$ =(730, 626, 737, 716, 681, 721, 710, 680, 626, 708, 658, 690, 579, 714, 704).

**Решение:**

Выборки содержат мало повторяющихся элементов, поэтому вариационный ряд мы составлять не будем. При вычислении можно использовать те же формулы, что и в примере 1, или использовать следующие:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) + c,$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 - (\overline{x} - c)^2,$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S}^2.$$

Промежуточные вычисления сведены в таблицу 3.

Т а б л и ц а 3

| $x_i$ | $x_i - c_x$ | $(x_i - c_x)^2$ | $y_i$ | $y_i - c_y$ | $(y_i - c_y)^2$ | $z_i$ | $z_i - c_z$ | $(z_i - c_z)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82 | 8 | 64 | -237 | -19 | 361 | 730 | 72 | 5184 |
| 70 | -4 | 16 | -209 | 9 | 81 | 626 | -32 | 1024 |
| 83 | 9 | 81 | -243 | -25 | 625 | 737 | 79 | 6241 |
| 80 | 6 | 36 | -239 | -21 | 441 | 716 | 58 | 3364 |
| 76 | 2 | 4 | -221 | -3 | 9 | 681 | 23 | 529 |
| 81 | 7 | 49 | -238 | -20 | 400 | 721 | 63 | 3969 |
| 80 | 6 | 36 | -238 | -20 | 400 | 710 | 52 | 2704 |
| 76 | 2 | 4 | -223 | -5 | 25 | 680 | 21 | 441 |
| 70 | -4 | 16 | -207 | 11 | 121 | 626 | -32 | 1024 |
| 79 | 5 | 25 | -237 | -19 | 361 | 708 | 50 | 2500 |
| 74 | 0 | 0 | -216 | 2 | 4 | 658 | 0 | 0 |
| 77 | 3 | 9 | -228 | -10 | 100 | 690 | 22 | 484 |
| 65 | -9 | 81 | -193 | 25 | 625 | 579 | -79 | 6241 |
| 80 | 6 | 36 | -234 | -16 | 256 | 714 | 56 | 3136 |
| 79 | 5 | 25 | -229 | -11 | 121 | 704 | 46 | 2116 |
| $\sum$ | 42 | 482 | $\sum$ | -122 | 3930 | $\sum$ | 399 | 38957 |

$x_{\min}$ =65, $x_{\max}$ =83. $y_{\min}$ =-243, $y_{\max}$ =-193. $z_{\min}$ =579, $z_{\max}$ =737.

Возьмем $c_x$ =74. Возьмем $c_y$ =-218. Возьмем $c_z$ =658.

$\overline{x} = \frac{42}{15} + 74 = 76.8$. $\overline{y} = \frac{-122}{15} - 218 = -226.13$. $\overline{z} = \frac{399}{15} + 658 = 684.6$.

$$\overline{S}_x^2 = \frac{482}{15} - (76.8 - 74)^2 = 32.13 - 7.84 = 24.29,$$

$$S_x^2 = \frac{15}{14}24.29 = 26.03,$$
$$S_x = \sqrt{26.03} = 5.1,$$
$$\overline{S}_y^2 = \frac{3930}{15} - (-226.13 + 218)^2 = 262 - 66.15 = 195.85,$$
$$S_y^2 = \frac{15}{14}195.85 = 209.83,$$
$$S_y = \sqrt{209.83} = 14.49,$$
$$\overline{S}_z^2 = \frac{38957}{15} - (684.6 - 658)^2 = 2597.13 - 707.56 = 1889.57,$$
$$S_z^2 = \frac{15}{14}1889.57 = 2024.53,$$
$$S_z = \sqrt{2024.53} = 44.99.$$

**Задача №3.**

Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\overline{x}$, $S^2$, $S$ по выборке (67, 68, 70, 76, 80, 87, 75, 79, 79, 73, 86, 78, 79, 67, 79, 82, 70, 83, 80, 76, 81, 80, 76, 70, 79, 74, 77, 65, 80, 79, 78, 75, 82, 85, 68, 72, 71, 72, 68, 86, 85, 71, 72, 76, 90, 95, 88, 86, 71, 87, 77, 73, 82, 74, 67, 82, 72, 74). Сначала составить вариационный ряд.

**Решение:**

Найдем $x_{\min} = 65$ и $x_{\max} = 95$. Выберем началом первого интервала 65, а длиной интервала - 5. Вычисления проводим по формулам:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) + c \equiv \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i - c)}{k}n_i\right)k + c,$$

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i}{n}k^2 - (\overline{x} - c)^2,$$

где $k$ — длина интервала, $n_i$ — количество попавших в $i$-тый интервал элементов выборки, $c$ — произвольное число.

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S}^2.$$

Промежуточные вычисления представлены в таблице 4.

Т а б л и ц а 4

| Интервал | $n_i$ | Середина интервала, $x_i$ | $\frac{x_i - c}{k}$ | $\frac{x_i - c}{k} n_i$ | $\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$ | $\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 65-70 | 10 | 67.5 | -2 | -20 | 4 | 40 |
| 70-75 | 14 | 72.5 | -1 | -14 | 1 | 14 |
| 75-80 | 18 | 77.5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 80-85 | 8 | 82.5 | 1 | 8 | 1 | 18 |
| 85-90 | 7 | 87.5 | 2 | 14 | 4 | 28 |
| 90-95 | 1 | 92.5 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| $\sum$ | 58 | — | — | -9 | — | 109 |

Выберем $c$ из середины интервала, в который вошло больше всего элементов, то есть $c$=77.5, $k$=5.

$$\bar{x} = \frac{-9}{58} \cdot 5 + 77.5 = 76.7, \qquad \bar{S}^2 = \frac{109}{58} \cdot 25 - (76.7 - 77.5)^2 = 47 - 0.64 = 46.36,$$

$$S^2 = \frac{58}{57} \cdot 46.36 = 47.17, \qquad S = \sqrt{47.17} = 6.86.$$

**Задача №4.**

Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, $S^2$, $S$ по выборкам А и В, используя результаты, полученные в примере 3.

<u>Выборка А:</u> 0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 2 3 4 3 2 3 2 4 2.

N=69.

Начало первого интервала: 0.

Длина интервала: 1.

<u>Выборка В:</u> 135 133 124 132 104 152 134 130 129 120 122 124 117 123 123 129 121 122 125 131 147 124 137 112 126 128 111 129 115 147 131 132 137 119 125 120 129 125 123 127 132 118 133 132 132 134 131 120 135 132 125 132 108 114 121 133 133 135 131 125 114 115 122 131 125 132 120 126 115 117 118 118 132 134 127 127 124 135 128 127 115 144 129 120 137 127 125 116 132 120 117 127 118 109 127 122 120 135 116 118 133 136 125 126 119 126 129 127 129 124 127 132 126 131 127 130 126 124 135 127 124 123 123 130 132 143 122 138 120 134 108 132 121 111 123 140 137 120 125 131 118 120 120 136 129 127 116 138 128 133 122 131 128 140 138 134 120 126 109 137 111 115 117 130 113 126 115 124 125 118 115 128 123 129 128 120 115 134 118 135 134.

N=181.

Начало первого интервала: 102.

Длина интервала: 4.

**Решение:**

Для нахождения $\bar{x}$, $S^2$, $S$ используем формулы:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k} n_i}{n} k + c\,;$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i}{n} k^2 - (\bar{x} - c)^2\,;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \bar{S}^2\,.$$

Для выборки А имеем:

$\bar{x} = 2.51$, $\bar{S}^2 = 2.2072$, $n = 69$, $S^2 = \frac{69}{68} \cdot 2.2072 = 2.2396$.

Для выборки В имеем:

$\bar{x} = 126.02$ $\bar{S}^2 = 65.9774$, $n = 181$, $S^2 = \frac{181}{180} \cdot 65.9774 = 66.3440$.

# 2. Теория точечных оценок

## 2.1. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией

Предположим, что о распределении СВ $X$ известно, что оно принадлежит некоторому параметрическому семейству распределений. В случае непрерывной СВ это означает, что известен вид плотности $p(x|\theta)$, но неизвестно значение параметра $\theta$, определяющего конкретную плотность. Параметр $\theta$ может быть вектором. Например, для нормального распределения $\theta = (\mu, \sigma)$

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2\}.$$

В случае дискретной СВ $p(x|\theta)$ будет обозначать вероятность $P(X = x)$. Например, для пуассоновского распределения

$$p(x|\theta) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, x = 0,1,2,3,\ldots .$$

Пусть $\tau(\theta)$ – некоторый числовой параметр, представляющий для нас интерес. Например, $\tau(\theta) = \theta, \tau(\mu,\sigma) = \mu, \tau(\mu,\sigma) = \mu/\sigma$.

Рассмотрим задачу оценивания, состоящую в построении такой функции $t = (x_1, \ldots, x_n)$, чтобы при подстановке вместо аргументов $x_1, \ldots, x_n$ данных выборки мы получили числа, близкие к $\tau(\theta)$. Такую близость можно обеспечить лишь в среднем. Поэтому требования, предъявляемые к качеству оценок, формулируется в вероятностных терминах, относящихся к распределению оценок, рассматриваемых как случайные величины. Это требование, состоящее в том, чтобы значения оценки в большинстве опытов были близки к значению оцениваемого параметра, можно сформулировать в виде следующего определения.

*Определение.* Оценка $t = (x_1, \ldots, x_n)$ называется несмещенной для $\tau(\theta)$, если $\mathrm{M}_\theta t(x_1,\ldots,x_n) = \tau(\theta)$ для всех $\theta$, где $\mathrm{M}_\theta$ – символ математического ожидания при условии, что случайный вектор ($x_1, \ldots, x_n$) имеет распределение $L(x|\theta) = p(x_1|\theta)\ldots p(x_n|\theta)$.

Например, как показано выше, $\bar{x}$ и $\bar{S}^2$ — несмещенные оценки для $\mu$ и $\sigma^2$ соответственно.

Но как правило, одно лишь требование несмещенности не выделяет оценку $t(x)$ однозначно. Поэтому следующим желательным требованием является требование минимума дисперсии этой оценки. Чтобы статистика могла служить хорошей оценкой данного параметра $\tau(\theta)$, необходимо, чтобы распределение этой статистики было сосредоточенно в достаточной близости от неизвестного значения $\tau(\theta)$, так, чтобы вероятность больших отклонений этой статистики от $\tau(\theta)$ была достаточно мала. Тогда при систематическом многократном применении этой статистики в качестве оценки данной характеристики в среднем будет получаться достаточная точность. Вероятность больших отклонений будет мала, и они будут встречаться редко. Таким образом, среди всех несмещенных оценок $t(x)$ для $\tau(\theta)$ более желательной является та оценка, которая имеет минимальную дисперсию $\mathrm{D}_\theta(t(x)) = \mathrm{M}(t(x) - \tau(\theta))^2$ для всех $\theta$.

Такие оценки называются несмещенными оценками с минимальной дисперсией (Н.О.М.Д.).

*Определение.* Несмещенной оценкой с минимальной дисперсией называется такая оценка $t^*(x_1,\ldots,x_n)$, что $\mathrm{D}t^* \le \mathrm{D}t$ для всех $\theta$, для любой несмещенной оценки $t(x_1,\ldots,x_n)$ параметра $\tau(\theta)$. Уже эти требования, как правило, выделяют оценку $t(x)$ однозначно, если такая оценка вообще существует. Существование же Н.О.М.Д. имеет место далеко не всегда, так как дисперсия для этих оценок должна быть минимальной равномерно по $\theta$. Это обстоятельство является, пожалуй, самым серьезным аргументом против таких сильных требований. При неограниченном увеличении числа наблюдений, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\left| t(x_1,\ldots,x_n) - \tau(\theta) \right| < \varepsilon) = 1$ для $\forall \varepsilon > 0$.

Итак, состоятельность оценки означает, что при достаточно большом количестве наблюдений $n$ со сколь угодно большой достоверностью отклонение оценки от истинного значения параметра меньше любой наперед заданной величины.

Для того, чтобы несмещенная оценка была состоятельной, достаточно, чтобы дисперсия оценки стремилась к нулю при $n \to \infty$ (это следует из неравенства Чебышева).

**Пример 1.** Показать что оценки

а) $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ - выборочное среднее,

б) $\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2$ - выборочная дисперсия,

являются состоятельными оценками.

*Решение.* По закону больших чисел

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n} - \mathrm{M}X_1\right| < \varepsilon\right\} \to 1, n \to \infty \text{ ,т.е.}$$

оценка а) состоятельна, так как $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$ ;

$$\text{б)}\, \overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{1i}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum x_i + n\overline{x}^2\right) =$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2 .$$

Первый член является средним арифметическим случайных величин $x_i^2$ следовательно, он сходится по вероятности к $\mathrm{M}x_1^2$, второй член сходится по вероятности $[Mx_1]^2$. Это означает, что $\overline{S}^2$ по вероятности сходится к $\mathrm{M}x_1^2 - (\mathrm{M}x_1)^2 = \mathrm{D}x_1$. Следовательно, оценка является состоятельной, но она не является несмещенной.

**Пример 2.** (Существование нескольких несмещенных оценок).

$x_1, \ldots, x_n$ – независимые одинаково распределенные СВ, имеющие пуассоновское распределение $\mathrm{P}_\theta\{x_1 = k\} = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$.

Оценка $\overline{S}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2$ является несмещенной оценкой для дисперсии. Из того, что для пуассоновского распределения математическое ожидание и дисперсия равны $\theta$ и $\overline{x}$ является несмещенной оценкой для $\theta$ следует, что $\overline{x}$ является несмещенной оценкой для дисперсии $\theta$. Кроме того, любая комбинация $\alpha\overline{x} + (1-\alpha)S_1^2$ является несмещенной оценкой $\theta$ $(\alpha \in (-\infty, \infty))$, т.е.

$$\mathrm{M}(\alpha\overline{x} + (1-\alpha)S_1^2) = \alpha\mathrm{M}\overline{x} + (1-\alpha)\mathrm{M}S_1^2 = \alpha\theta + (1-\alpha)\theta = 0.$$

Однако оценка $\overline{x}$ имеет наименьшую дисперсию.

**Пример 3.** (когда не существует несмещенной оценки).

Производится одно наблюдение $x$, где $x$ – СВ, имеющая пуассоновское распределение с неизвестным параметром $\theta$

$$\mathrm{P}_\theta(x = k) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}, k = 0,1,\ldots .$$

Показать, что для $\tau(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$ не существует несмещенной оценки.

*Решение.* Предположим, что $t(x)$ является несмещенной оценкой $\tau(\theta)$, т.е. $\mathrm{M}_{\theta}t(x)=\tau(\theta)$, откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t(x)e^{-\theta}\theta^k}{k!}=\frac{1}{\theta}\;\Rightarrow\;\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t(x)}{k!}\theta^k=\frac{e^{\theta}}{\theta}=\frac{1}{\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}.$$

Окончательно

$$\sum\frac{t(x)}{k!}\theta^k=\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\theta^k.$$

И как легко понять, не существует функции $t(x)$, для которой последнее равенство было бы справедливо для всех $\theta>0$.

**Пример 4.** (когда несмещенная оценка абсурдна).

Случайная величина $x$ имеет геометрическое распределение:

$$\mathrm{P}\{x=k\}=q^k p\;,\;\;k\geq 0,\;\;p+q=1$$

(число неудач, предшествующих первому успеху в последовательности испытаний Бернулли).

Несмещенной оценкой параметра $p$ является оценка

$$t(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}t(k)q^k p=p,\;\;\sum_{k=0}^{\infty}t(x)q^k=1\;\Rightarrow\;t(k)=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k>0.\end{cases}$$

Однако эта оценка абсурдна, т.к., например, если первый успех получен на втором испытании, т.е. $x=1$, то абсурдно говорить, что вероятность успеха $\mathrm{P}=0$.

## 2.2. Единственность Н.О.М.Д.

Докажем, что Н.О.М.Д. единственная в том смысле, что если $t_1$ и $t_2$ есть две Н.О.М.Д. для $\tau(\theta)$, то $t_1=t_2$ с вероятностью единица.

В самом деле, рассмотрим новую оценку $t_3=\dfrac{1}{2}(t_1+t_2),$ для которой

$$\mathrm{M}_\theta t_3 = \frac{1}{2}(\mathrm{M}t_1 + \mathrm{M}t_2) = \tau(\theta),$$
$$\mathrm{D}t_3 = \frac{1}{4}(\mathrm{D}t_1 + \mathrm{D}t_2 + 2\operatorname{cov}(t_1, t_2)).$$

Известно, что $\operatorname{cov}(t_1, t_2) \le \sqrt{Dt_1 Dt_2}$, причем знак равенства имеет место лишь тогда, когда почти всюду

$$(t_1 - \tau) = k(\theta)(t_2 - \tau), \tag{2.1}$$

где $k(\theta)$ — любая функция от $\theta$. Если обозначить $\mathrm{D}t_1 = \mathrm{D}t_2 = V$, то мы показали, что $\operatorname{cov}(t_1, t_2) \le V$, а значит, $\mathrm{D}t_3 \le V$, причем знак равенства имеет место, лишь когда выполнено (2.1). Но, с другой стороны, $t_1$ и $t_2$ — Н.О.М.Д., т.е. $V = \mathrm{D}t_1 \le \mathrm{D}t_3$, поэтому $\mathrm{D}t_3 = V$ и следовательно, выполнено (2.1).

Найдем $k(\theta)$. Имеем $V = \operatorname{cov}(t_1, t_2) = k(\theta)V$, откуда $k(\theta) = 1$ и, значит, $t_1 = t_2$ почти всюду.

## 2.3. Информационное количество Фишера

В дальнейшем мы будем предполагать, что неизвестный параметр $\theta$ принадлежит открытому интервалу на прямой $\mathrm{R}$. Множество $X$, для которых $p(x \mid \theta) \ne 0$, не зависит от $\theta$. Эти условия, например, не выполняются для равномерного распределения на интервале $(0, \theta)$, где $\theta$ − неизвестный параметр, так как область, где $p(x \mid \theta) \ne 0$, зависит от $\theta$.

Пусть $X$ – СВ с распределением $p(x \mid \theta)$. Количество информации о $\theta$, содержащееся в случайной величине $X$, определяется по Фишеру как

$$I(\theta) = \mathrm{M}_\theta \left[\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right]^2 = \mathrm{D}_\theta \left[\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right], \tag{2.2}$$

т.к. $\mathrm{M}_\theta \left[\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right] = 0$.

Действительно,

$$\int p(x \mid \theta) dx = 1 \;\Rightarrow\; \int p'(x \mid \theta) dx = 0 \;\Rightarrow$$
$$\int p(x \mid \theta) \frac{p'(x \mid \theta)}{p(x \mid \theta)} dx = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} p(x \mid \theta) dx = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{M}_\theta \left[\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right] = 0.$$

Рассмотрим некоторые свойства информационного количества.

*Свойство 1*. Пусть $I_1(\theta)$ и $I_2(\theta)$ — количества информации о $\theta$ содержащиеся в независимых величинах $x_1$ и $x_2$ соответственно, а $I(\theta)$ количество информации, содержащиеся в паре ($x_1, x_2$). Тогда $I = I_1 + I_2$.

*Свойство 2*. Пусть $x_1,\dots,x_n$ – независимые одинаково распределенные величины и $I$ — количество информации о $\theta$, содержащейся в каждой из них. Тогда количество информации в ($x_1,\dots,x_n$) равно $nI$.

Приведем эквивалентную форму количества информации. Легко видеть, что

$$\int p_1(x|\theta)dx = 1 \;\Rightarrow\; \int p'(x|\theta)dx = 0 \;\Rightarrow\; \int p''(x|\theta)dx = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x|\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{p'(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right] = \frac{p(x|\theta)\cdot p''(x|\theta) - (p'(x|\theta))^2}{(p(x|\theta))^2} =$$

$$= \frac{p''(x|\theta)}{p(x|\theta)} - \left[\frac{p'(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right]^2.$$

Поэтому $\mathrm{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln p(x|\theta)\right) = \int p''(x|\theta)dx - I(\theta)$, то есть

$$I(\theta) = -\mathrm{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x|\theta)\right). \qquad (2.3)$$

Во многих случаях использование последней формулы приводит к более простым выкладкам.

*Пример 1*. Распределение Бернулли. Положим, что $X$ имеет распределение Бернулли, параметр которого $\theta$ неизвестен (0<$\theta$<1). Определим количество информации $I(\theta)$ о $\theta$, содержащейся в $X$. Так как $X$ принимает два значения 0 и 1, то $\ln p(x|\theta) = x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)$.

Так как $\mathrm{M}X = 0$, то информация по Фишеру

$$I(\theta) = \mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln p(x|\theta)}{\partial\theta^2}\right] = \frac{\theta}{\theta^2} + \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.$$

*Пример 2*. Нормальное распределение. Предположим, что $X$ имеет нормальное распределение с неизвестным средним $\mu$ и известной дисперсией $\sigma^2$. Определим $I(\mu)$ СВ $X$:

$$\ln p(x|\mu) = \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Следовательно, $\frac{\partial \ln p(x|\mu)}{\partial \theta} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}$ и $\frac{\partial^2 \ln p(x|\mu)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$; поэтому, учитывая (2.2), получаем $I(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}$.

## 2.4. Неравенство Крамера-Рао

Если $x_1, \ldots, x_n$ – выборка, то плотность распределения СВ $(x_1, \ldots, x_n)$ равна $L(x_1,..., x_n | \theta) = p_1(x_1 | \theta)...p_n(x_n | \theta)$.

Для функции $L$ Фишером предложен термин “функция правдоподобия”. (Если рассматривать ее, как функцию от $\theta$ при фиксированном $x$). Пусть $\theta$ - числовой параметр. Величина $I = \mathrm{M}_\theta \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2$ называется количеством информации (по Фишеру), содержащейся в выборке.

*Теорема 1*. Неравенство Крамера-Рао.

Пусть $t(x)$ — несмещенная оценка для $\tau(\theta)$. Тогда

$$\mathrm{D}_\theta t \ge \frac{(\tau'(\theta))^2}{\mathrm{M}_\theta \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{I}. \tag{2.4}$$

При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$ имеет вид

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \grave{A}(\theta)(t(x) - \tau(\theta)),$$

где $A(\theta)$ - некоторая функция, зависящая лишь от $\theta$, $t(x)$ — несмещенная оценка для $\tau(\theta)$, если $\mathrm{M}_\theta t(x_1,..., x_n) = \tau(\theta)$ для всех $\theta$.

## 2.5. Эффективные оценки

Правая часть неравенства Крамера-Рао есть минимальная граница дисперсии для каждого $\theta$. Несмещенная оценка, для которых эта граница достигается, называются эффективными оценками. Ясно, что эффективная оценка для $\tau(\theta)$ есть Н.О.М.Д. для $\tau(\theta)$ и, значит, она единственна.

*Теорема.* Для того чтобы несмещенная оценка $t = t(x)$ для $\tau(\theta)$ была эффективной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \grave{A}(\theta)(t(x) - \tau(\theta)), \tag{2.5}$$

где $\grave{A}(\theta)$ — есть некоторая функция, зависящая лишь от $\theta$. При этом

$$\mathrm{D}t = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right|. \tag{2.6}$$

*Пример 1.*

1. Показательное распределение $p(x\,|\,\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$,

$$L = \prod_{i-1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum x_i} = \theta^n e^{-n\theta \bar{x}};\ \ln L = n\ln\theta - n\theta\bar{x},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - n\bar{x} = -n(\bar{x} - \frac{1}{\theta}),$$

при $\tau(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$; $\grave{A} = -n$; $t = \bar{x}$ получаем $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \grave{A}(t - \tau(\theta))$.

Следовательно, $\bar{x}$ — эффективная оценка для $\tau(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$ и $\mathrm{D}\bar{x} = \left|\dfrac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \dfrac{1}{n\theta^2}$.

2 .Пуассоновское распределение с параметром $\theta$: $p(x\,|\,\theta) = \dfrac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$, $x = 0.2$.

$$L = \prod_{i-1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}\right) e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -n + \frac{n\bar{x}}{\theta} = \frac{n}{\theta}(\bar{x} - \theta),$$

при $A = \dfrac{n}{\theta}$, $t = \bar{x}$, $\tau(\theta) = \theta$ получаем, что $\bar{x}$ - эффективная оценка для $\theta$ и $\mathrm{D}\bar{x} = \left|\dfrac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \dfrac{\theta}{n}$.

3. Рассмотрим семейство распределений $N(\theta, \sigma^2)$ с известной дисперсией $\sigma^2$

$$p(x\,|\,\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \theta)^2\right).$$

В данном случае $L(x_1, \ldots, x_n\,|\,\theta) = \dfrac{1}{\sigma^n \left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x_i - \theta)^2\right)$.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum (x_i - \theta) = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{o} - \theta).$$

Оглавление

Последнее равенство совпадает с (2.5), если $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = A(\theta)(t(x) - \tau(\theta))$,

$$A(\theta) = \frac{n}{\sigma^2},\ t(x) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,\ \tau(\theta) = \theta .$$

Поэтому $\bar{x}$ есть Н.О.М.Д. для $\theta$ с дисперсией $\mathrm{D}t = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \frac{\sigma^2}{n}$.

4. Рассмотрим семейство распределений $N(\mu, \theta^2)$ с известным средним $\mu$.

В данном случае $p(x\,|\,\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2\right)$.

$$L = \frac{1}{\theta^n (2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2}\sum (x_i - \mu)^2\right).$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum (x_i - \mu)^2 = \frac{n}{\theta^3}\left(\frac{1}{n}\sum (x_i - \mu)^2 - \theta^2)\right).$$

Это совпадает с (2.5), если $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = A(\theta)(t(x) - \tau(\theta))$,

$$A(\theta) = \frac{n}{\theta^3},\ t(x) = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu)^2,\ \tau(\theta) = \theta^2 ,$$

т.е. $t(x) = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu)^2$ является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией для $\theta^2$, причем $\mathrm{D}t(x) = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \frac{2\theta^4}{n}$.

5. Биноминальное распределение.

$$L(r\,|\,\theta) = C_n^r \cdot \theta^r \cdot (1-\theta)^{n-r},\ r = 0, 1, \dots, n,$$
$$\ln L = \ln C_n^r + r\ln\theta + (n-r)\ln(1-\theta),$$
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{r}{\theta} - \frac{n-r}{1-\theta} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}\left(\frac{r}{n} - \theta\right).$$

Таким образом, $t = \frac{r}{n}$ есть Н.О.М.Д. для $\theta$ и

$$\mathrm{D}t = \left|\frac{\tau'(\theta)}{A(\theta)}\right| = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

6. Для семейства распределений Коши.

$$p(x\,|\,\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}.$$

Получаем

$$L(\overline{x},\theta)=\frac{1}{\pi^n}\prod_1^n\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2},$$
$$\ln L=-n\ln\pi-\sum\ln(1+(x_i-\theta)^2),$$
$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=2\sum_1^n\frac{x_i-\theta}{1+(x_i-\theta)^2}.$$

Это равенство не может иметь форму (2.5), поэтому Н.О.М.Д. в этом случае не существует.

*Замечание 1.* Из (2.5) видно, что если Н.О.М.Д. существует, то она существует лишь для какой-то одной функции $\tau(\theta)$ параметра $\theta$ и не существует ни для какой другой функции параметра $\theta$.

## 2.6. Экспоненциальное семейство распределений

Для того, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\grave{A}(\theta)(t(x)-\tau(\theta)),$$

необходимо и достаточно (при некоторых условиях гладкости), чтобы плотность $P(x\,|\,\theta)$ имела вид

$$P(x\,|\,\theta)=\exp\{A(\theta)B(x)+C(\theta)\}.$$

Такое семейство распределений часто называют экспоненциальным семейством распределений. Для этого семейства распределений Н. О. М. Д. Существует и равна

$$t(x_1,...,x_n)=\frac{1}{n}\sum_1^n B(x_k),$$

$$\tau(\theta)=-\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)};\quad \mathrm{D}_\theta t=\left|\frac{\tau'(\theta)}{nA'(\theta)}\right|.$$

Действительно,

$$L(x_1,...x_n\,|\,\theta)=P(x_1\,|\,\theta)...P(x_n\,|\,\theta),$$

$$\ln L(x_1,...,x_n\,|\,\theta)=\sum_1^n\ln P(x_i\,|\,\theta),$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^n A'(\theta)B(x_i)+nC'(\theta)=nA'(\theta)(\frac{1}{n}\sum B(x_i)+\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)});\mathrm{D}t=\left|\frac{\tau'(\theta)}{nA(\theta)}\right|.$$

## 2.7. Улучшение неравенства Крамера – Рао. Неравенство Баттачария

Можно найти лучшую (т.е. большую) нижнюю границу для дисперсии оценки, чем правая часть, а неравенстве Крамера – Рао в случаях, когда последняя не достигается, т.е. когда не существует эффективной оценки. Основное условие того, чтобы нижняя граница дисперсии в неравенстве Крамера – Рао достигалась, состоит в существовании оценки $t$, для которой $t-\tau(\theta)$ есть линейная (для каждого $\theta$) функция от

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\theta}.$$

Но даже если такая оценка не существует, может существовать оценка, для которой $t-\tau(\theta)$ есть линейная функция от

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\theta};\ \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2},\ldots,\frac{1}{L}\frac{\partial^s L}{\partial\theta^s}.$$

Именно этот факт приводит к следующим рассуждениям Баттачария (Bhattacharyya). Положим

$$L^{(k)}=\frac{\partial^k L}{\partial\theta^k};\quad \tau^{(k)}=\frac{d^k}{d\theta^k}\tau(\theta).$$

*Теорема*. Пусть $t=t(x)$ есть несмещенная оценка для $\tau(\theta)$. Тогда

$$\mathrm{D}_\theta t\ge\sum_{i,j=1}^{s}c_i c_j a_{ij}\,, \tag{2.7}$$

где $a_{ij}=\mathrm{M}_\theta(\frac{L^{(i)}}{L}\frac{L^{(j)}}{L})$, $i,j=1,\ldots,S$, а коэффициенты $c_i=c_i(\theta)$ определяются системой

$$\sum_{i=1}^{s}a_{ij}=\tau^{(i)}\,,\ \ i=1,\ldots s\,. \tag{2.8}$$

Если матрица $A=\{a_{ij}\}$ обратима и $A^{-1}=\{a^{ij}\}$, то

$$\mathrm{D}_\theta t\ge\sum_{i,j=1}^{s}a^{ij}\tau^{(i)}\tau^{(j)}\quad . \tag{2.9}$$

Последнее неравенство есть неравенство Баттачария. Неравенства (2.7) и (2.9) превращаются в равенство тогда и только тогда, когда $t-\tau(\theta)=\sum_{i=1}^{s}c_i\frac{L^{(i)}}{L}$ при некоторых $c_i=c_i(\theta)$.

*Пример.*

Рассмотрим нормальную модель $N(\theta,\sigma^2)$. Здесь

$$L(x\,|\,\theta)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\},$$

и можно проверить, что

$$\frac{1}{L}\left[\frac{2\theta\sigma^2}{n}\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\sigma^4}{n^2}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}\right]=\bar{X}^2-\frac{\sigma^2}{n}-\theta^2.$$

По критерию Баттачария отсюда следует, что статистика $T^*=\bar{X}^2-\dfrac{\sigma^2}{n}$ – оптимальная (то есть несмещенная с минимальной дисперсией) оценка для $\tau(\theta)=\theta^2$.

## 2.8. Многомерный аналог неравенства Крамера–Рао

Будем предполагать, что $\theta=(\theta_1,...,\theta_r)$.

*Теорема.* Пусть $t(x)$ – несмещенная оценка для числовой функции $\tau(\theta)=\tau(\theta_1,...,\theta_r)$.

Тогда

$$\mathrm{D}_\theta t\geq\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}c_ic_j\,, \qquad (2.10)$$

где $a_{ij}=\mathrm{M}_\theta\left(\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}\right)$, а коэффициенты $c_i=c_i(\theta)$ удовлетворяют системе

$$\sum_{j=1}^{r}a_{ij}c_j=\frac{\partial\tau}{\partial\theta_i},\quad i=1,\ldots,r\,.$$

Если матрица $A=\{a_{ij}\}$ обратима и $A^{-1}=\{a_{ij}\}$, то $\mathrm{D}_\theta t\geq\sum a^{ij}\dfrac{\partial\tau}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial\tau}{\partial\theta_j}$.

При этом знак равенства достигается тогда и только тогда, когда оценка имеет вид

$$t(x)-\tau(\theta)=\sum c_i(\theta)\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i},$$

где $c_i(\theta)$ – функции, зависящие лишь от $\theta$.

Оглавление

# 3. Методы нахождения оценок

## 3.1. Оценки максимального правдоподобия

Предположим, что СВ $X_1,...,X_n$ образуют случайную выборку. Обозначим через $\mathrm{P}(x\,|\,\theta)$ распределение вероятностей или плотностью распределения СВ $X_i$. Здесь $\theta$ — скалярный или векторный параметр $\theta\in\Omega$. Совместное распределение случайных величин обозначим через $L_n(x\,|\,\theta)$.

Предположим, что случайный вектор $x=(x_1,...x_n)$ имеет дискретное распределение. Если вероятность $L_n(x\,|\,\theta)$ получить наблюдаемое значение $x$ велика при $\theta=\theta_0$ и мала при остальных значениях $\theta$, то естественно в качестве оценки $\theta$ взять $\theta_0$. Эта концепция формализуется в следующем определении для каждого возможного вектора наблюдений $x$, пусть $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,...x_n)\in\Omega$ обозначаем значение $\theta$, для которого функция $L_n(x\,|\,\theta)$ принимает максимальное значение, т.е. $L(x\,|\,\hat{\theta})\geq L(x\,|\,\theta)$ для всех $\theta\in\Omega$, или, что то же самое, $L(x\,|\,\hat{\theta})=\max L(x\,|\,\theta)$.

Такая оценка $\hat{\theta}$ параметра $\theta$ называется оценкой максимального правдоподобия (сокращенно о.м.п.).

Будем предполагать, что $\Omega$ — подмножество Евклидова пространства, и для каждого $x=(x_1,...x_n)$ максимум функции правдоподобия $L_n(x\,|\,\theta)$ достигается во внутренней точке множества $\Omega$. Отсюда следует, в частности, что о.м.п. $\hat{\theta}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=0 \text{ или } \frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=0 \text{ при } \theta=\hat{\theta},\ \frac{\partial}{\partial\theta}L=\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}L,...,\frac{\partial}{\partial\theta_3}L\right),$$

когда $\theta$ — векторный параметр.

*Замечание 1.* Эффективная оценка для числового параметра $\theta$ может быть получена методом максимального правдоподобия, так как

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=A(\theta)(t(x)-\theta),$$

откуда следует, что решение $(\ln L)'=0$ имеет вид $\hat{\theta}=t(x)$.

*Замечание 2.* О.м.п. есть функция от достаточной статистики. Действительно, если существует достаточная статистика для параметра $\theta$, то

$$L_n(x\,|\,\theta) = g(T(x)\,|\,\theta)\,h(x), \tag{3.1}$$

отсюда

$$\frac{\partial \ln L_n(x\,|\,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln g(T(x)\,|\,\theta).$$

Пусть при $\hat{\theta}$ функция правдоподобия $L_n(x\,|\,\theta)$ принимает максимальное значение. Из (3.1) следует, что при $\hat{\theta}$ функция $g(T(x)\,|\,\theta)$ также принимает максимальное значение. Так как $g(T(x)\,|\,\theta)$ зависит от $x$ только через функцию $T(x)$, то и $\hat{\theta}$ будет функцией от $T(x)$.

**Пример 1.** Пусть $x_1,\ldots,x_n$ имеют распределение $N(\mu,\sigma^2)$ в данном случае

$$L_n(x\,|\,\theta) = \prod_1^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_k-\mu)^2\} = \frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\mu)^2\}.$$

Предположим, что параметры $\mu$ и $\sigma^2$ неизвестны.

Найдем о.м.п. $\hat{\theta} = (\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$. Имеем

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (x_k-\mu) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum (x_k-\mu)^2 = 0,$$

откуда

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_k, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_k-\bar{x})^2.$$

**Пример 2.** Предположим, что СВ имеют равномерное распределение на интервале $(0,\theta)$, причем значение параметра $\theta$ неизвестно

$$p(x\,|\,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & x \notin [0,\theta], \end{cases}$$

$$L_n(x\,|\,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & x_i \in [0,\theta], i = 1,\ldots,n \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Из (3.2) видно, что о.м.п. для $\theta$ является такое значение $\theta$, при котором $x_i \le \theta$ и при котором функция $1/\theta^n$ принимает максимальное значение. Так как $1/\theta^n$ — убывающая функция, то такой оценкой будет $\hat{\theta} = \max(x_1,...,x_n)$.

**Пример 3.** (когда не существует о.м.п.). Пусть

$$p(x\,|\,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0 < x < \theta, \\ 0, x \notin (0,\theta). \end{cases}$$

В этом примере значение $\hat{\theta} = \max(x_1,...,x_n)$ не подходит, так как $\theta$ должно быть строго больше каждого из $x_i$, $i = 1,...,n$. Поскольку $\theta$ может выбрано как угодно близко к $\max(x_1,...,x_n)$, но не может совпадать с ним, то из этого следует, что о.м.п. не существует.

**Пример 4.** (неединственность о.м.п.). Пусть СВ $X_1,...,X_n$ имеют равномерное распределение на интервале $(\theta, \theta+1)$, причем значение $\theta$ неизвестно ($-\infty < \theta < \infty$)

$$L_n(x\,|\,\theta) = \begin{cases} 1, \text{для} \quad \theta \le x_i \le \theta + 1, \; i = 1,..., \; n \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Условие $\theta \le x_i$ для $i = 1,...,n$ эквивалентно условию $\theta \le \min(x_1,...,x_n\}$. Аналогично, $x_i \le \theta + 1$, $i = 1,...,n$, эквивалентно условию $\theta \ge \max(x_i) - 1$, т.е. (3.2) имеет вид

$$L_n(x\,|\,\theta) = \begin{cases} 1, \quad \max(x_1,...x_n) - 1 \le \theta \le \min(x_1,...,x_n) \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, любое значение $\theta$ из интервала $[\max(x_1,...x_n) - 1, \min(x_1,...,x_n)]$, является о.м.п.

*Свойство 1.* Если параметры $\theta$ и $\tau = g(\theta)$ связаны взаимно однозначной зависимостью, то их о.м.п. связаны той же зависимостью. Пусть $\theta = h(\tau)$ обозначает обратную к $\tau = g(\theta)$ функцию. Тогда выражая через новый параметр $\tau$ функцию максимального правдоподобия получаем $L_n(x\,|\,h(\tau))$. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\tau}$ будет такое значение $\tau$, при котором $L_n(x\,|\,h(\tau))$ принимает максимальное значение при $\theta = \hat{\theta}$, то из этого следует, что $L_n(x\,|\,h(\tau))$ принимает максимальное значение при $h(\tau) = \hat{\theta}$. Таким образом, о.м.п. $\hat{\tau}$ должна удовлетворять следующему уравнению $h(\tau) = \hat{\theta}$, что эквивалентно $\hat{\tau} = g(\hat{\theta})$, что и требовалось доказать.

**Пример 5.** В примере 1 мы нашли о.м.п. $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$. Определим теперь о.м.п. для σ и $\mathrm{M}x^2$. Из свойства 1 сразу следует, что о.м.п. для σ будет корень квадратный из выборочной дисперсии $\hat{\sigma}^2$. Далее, так как $\mathrm{M}x^2 = \sigma^2 + \mu^2$, то о.м.п. для $\mathrm{M}x^2$ будет $\hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2$.

### 3.2. Состоятельность оценки максимального правдоподобия

Обозначим через Ω множество значений неизвестного параметра $\theta$. Будем считать, что множество $X$ тех $x$, для которых $p(x|\theta) \neq 0$, не зависит от $\theta$. Так как нас не интересуют те $x$, для которых $p(x|\theta) = 0$, то окончательно будем считать, что функция $p(x|\theta)$ определена на $X \times \Omega$.

Обозначим через $\theta_0$ истинное значение параметра $\theta$ и через $\Omega_0$ — некоторую окрестность $\theta_0$, $\Omega_0 \in \Omega$. Можно показать, что при довольно общих предложениях о.м.п. $\hat{\theta}_n$:

1) состоятельна, т.е. при $n \to \infty$ $\mathrm{P}_{\theta_0}\{\left|\hat{\theta}_n - \theta_0\right| > \varepsilon\} \to 0$ для произвольного $\varepsilon$;

2) асимптотически нормальна $N(\theta_0, \frac{1}{n}, B_0^{-1})$, т.е. распределение случайного вектора $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ сходится к многомерному нормальному распределению $N(0, B_0^{-1})$, где

$$B_0 = B(\theta_0), B(\theta) = \{b_{ij}(\theta)\}, b_{ij}(\theta) = \mathrm{M}_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln p \frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln p);$$

3) асимптотически эффективна, т.е. при $n \to \infty$ $eff_\theta(\theta_n) \to 1$ для всех $\theta$, где по определению эффективность н.о. $t$ есть

$$eff_\theta(t) = \frac{1}{\mathrm{D}_\theta t^{-1} \mathrm{M}_\theta(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta})^2}.$$

Отметим, что всегда $0 \le eff_\theta(t) \le 1$, и эффективность оценки $t$ равна единице для всех $\theta$, тогда и только тогда, когда сама оценка $t$ является эффективной.

### 3.3. Метод моментов

Если распределение генеральной совокупности зависит от $r$ неизвестных параметров $\theta_1, ..., \theta_r$ и существует первые $r$ моментов распределения

$$a_k = a_k(\theta_1, ..., \theta_r),\ k = 1, \dots, r,$$

то приравняв выборочные моменты $\alpha_k^*$ к теоретическим и решая систему уравнений $\alpha_k = \alpha_k(\theta_1,...,\theta_r)$ $(k = 1,\dots,r)$, относительно $\theta_i$, найдем оценки $\hat{\theta}_i$ неизвестных параметров. Они будут являться функциями выборочных моментов.

Поскольку $\alpha_k{}^* \xrightarrow{P} a_k$ $(n \to \infty)$, то $\hat{\theta}_i \xrightarrow{P} \theta_i$, т.е. оценки, полученные методом моментов, состоятельны.

**Пример 1.** Пусть $X_1,...X_n$ — независимые случайные величины с плотностью распределения $\mathrm{P}(x) = \dfrac{1}{\theta_1}\exp\{-\dfrac{(x-\theta_2)}{\theta_1}\}$, если $x \ge \theta_2$ и $\mathrm{P}(x) = 0$ в противном случае.

Найдем оценки для неизвестных параметров $\theta_1$, $\theta_2$. Для этого вычислим первые два момента распределения:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\theta_1}\int_{\theta_2}^{\infty} x e^{-(x-\theta_2)/\theta_1} dx = \theta_1 + \theta_2, \quad \alpha_2 = \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_1^2.$$

Приравнивая теоретические моменты выборочным и решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1{}^* = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2, \\ \alpha_2{}^* = 2\hat{\theta}_1^2 + 2\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_2^2, \end{cases}$$

находим

$$\hat{\theta}_1 = \sqrt{\alpha_2{}^* - (\alpha_1{}^*)^2},$$
$$\hat{\theta}_2 = \alpha_1{}^* - \sqrt{\alpha_2{}^* - (\alpha_1{}^*)^2}.$$

### 3.4. Примеры решения задач

**Задача №1.**

Найти методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2 ... x_n$ точную оценку параметра для плотности распределения Вейбулла:

$$f(x) = \alpha\theta x^{\alpha\text{-}1} e^{\text{-}\theta x^{\alpha}}, \; x > 0, \alpha = 2,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 10.$$

**Решение:**

Запишем функцию правдоподобия:

$$L(x_1,...,x_5,\theta) = f(x_1,\theta) f(x_2,\theta)\cdot ...\cdot f(x_n,\theta) = 2\theta 2e^{-4\theta} 2\theta 5e^{-25\theta} 2\theta 6e^{-36\theta} 2\theta 8e^{-64\theta} \times$$
$$\times 2\theta 10e^{-100\theta} = 4\theta e^{-4\theta} 10\theta e^{-25\theta} 12\theta e^{-36\theta} 16\theta e^{-64\theta} 20\theta e^{-100\theta} = 153600\theta^5 e^{-229\theta}.$$

Для удобства прологарифмируем функцию:

$$\ln L(x_1,...,x_5,\theta) = \ln(153600\theta^5 e^{-229\theta}) = \ln 153600 + 5\ln\theta - 229\theta = 5\ln\theta - 229\theta + 11.94\,.$$

Для нахождения максимума функции правдоподобия найдем её производную по параметру $\theta$ и найдем уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,...,x_5,\theta) = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(5\ln\theta - 229\theta + 11.94) = 5\frac{1}{\theta} - 229 = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{5}{\theta} = 229 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{5}{229} = 0.02\,.$$

**Задача №2.**

Найти методом моментов по выборке 25.3, 23.1, 28.4, 26.9, 30.5, 22.8, 19.7 точечные оценки параметров для плотности распределения:

$$f(x) = \frac{\lambda\sqrt{\lambda x}}{\Gamma(3/2)}e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

**Решение:**

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\lambda)dx = \int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3/2)}e^{-\lambda x}dx = \left|\, t = \lambda x \right| = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3/2)}e^{-t}dt = \frac{3/2\cdot\Gamma(3/2+1)}{\Gamma(3/2)\cdot\lambda} = \frac{3}{2\lambda};$$

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2(\lambda,\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\lambda)dx = \int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx = \left|\, t = \lambda x \right| = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} = \frac{15}{4\lambda^2};$$

$$\mathrm{D}(\lambda,\alpha) = \mathrm{M}_2(\lambda,\alpha) - \mathrm{M}_1^2(\lambda,\alpha) = \frac{15}{4\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{6}{4\lambda^2} = \frac{3}{2\lambda^2}.$$

Среднее выборочное значение:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \overline{x} = \frac{1}{7}(19.7 + 22.8 + 23.1 + 25.3 + 26.9 + 28.4 + 30.5) = 25.2\,.$$

Дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \Rightarrow S^2 = \frac{1}{7}(5.5^2 + 2.4^2 + 2.1^2 + 0.1^2 + 1.7^2 + 3.2^2 + 5.3^2) = 11.66\,.$$

Тогда имеем

$$\hat{\lambda} = \frac{\overline{x}}{S^2}, \hat{\alpha} = \frac{\overline{x}^2}{S^2},$$

$$\hat{\lambda} = \frac{25.2}{11.66} = 2.15; \quad \hat{\alpha} = \frac{25.2^2}{11.66} = 54.3.$$

**Задача №3.**

СВ $X$ принимает два значения 1 и 0 с вероятностями $\mathrm{P}\{x=1\}=\lambda$, $\mathrm{P}\{x=0\}=1-\lambda$. Пусть в результате $m$ испытаний исход $x=1$ осуществился $k$ раз, а исход $x=0$ осуществился $m-k$ раз. Требуется получить оценку вероятности $\lambda$ по результатам опыта.

**Решение:**

В данном примере функция правдоподобия определяется биномиальным распределением $L(\lambda)=\lambda^k(1-\lambda)^{m-k}$. Уравнение правдоподобия принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\ln L(\hat{\lambda}) = \frac{k}{\hat{\lambda}} - \frac{m-k}{1-\hat{\lambda}} = 0.$$

Отсюда получаем решение $\hat{\lambda}=\frac{k}{m}$. Следовательно, оценкой вероятности $\mathrm{P}\{x=1\}=\lambda$ является относительная частота $\frac{k}{m}$ исхода $x=1$.

**Задача №4.**

Некоторая нормально распределенная СВ $\lambda$ измеряется независимо двумя неравноточными приборами, которые осуществляют измерения без систематических ошибок, но с разными дисперсиями $\mathrm{D}_1$ и $\mathrm{D}_2$. Нужно указать результирующую погрешность измерения СВ $\lambda$.

**Решение:**

Обозначим показания первого и второго приборов соответственно через $\eta_1$ и $\eta_2$. Можем записать $\eta_1=\lambda+\xi_1$, $\eta_2=\lambda+\xi_2$, где $\xi_1$, $\xi_2$ - независимые нормально распределенные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}_2$.

Нетрудно убедиться, что функция правдоподобия СВ $\lambda$ определяется выражением

$$L(\lambda) = p(\eta_1,\eta_2\,|\,\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{(\eta_1-\lambda)^2}{2\mathrm{D}_1} - \frac{(\eta_2-\lambda)^2}{2\mathrm{D}_2}\right].$$

Уравнение правдоподобия принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\ln L(\hat{\lambda}) = \frac{(\eta_1-\hat{\lambda})}{\mathrm{D}_1} + \frac{(\eta_2-\hat{\lambda})}{\mathrm{D}_2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\hat{\lambda} = \frac{D_2}{D_1 + D_2}\eta_1 + \frac{D_1}{D_1 + D_2}\eta_2.$$

Дисперсия такой оценки равна

$$D\hat{\lambda} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}.$$

**Задача №5.**

Под наблюдение поставлено $N = 8$ изделий. Наблюдения ведутся до отказа всех изделий, при появлении отказа отказавшее изделие не заменяется новым. Наработки до отказа в часах каждого из них приведены ниже.

| $N$ | $x_i$ | $N$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 5 | 520 |
| 2 | 170 | 6 | 680 |
| 3 | 250 | 7 | 1200 |
| 4 | 400 | 8 | 1500 |

Известно, что наработки подчинены экспоненциальному закону:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

Для данных условий нужно определить точечную оценку $\hat{\lambda}$ параметра $\lambda$.

**Решение:**

Для данного типа наблюдений справедлива формула

$$\hat{\lambda} = \frac{N-1}{\sum_{i=1}^{N} x_i}.$$

Подставляя в это выражение указанные значения, получаем:

$$\hat{\lambda} = \frac{8-1}{100+170+250+400+520+680+1200+1500} = 0.00166\ (1/÷).$$

**Задача №6.**

Под наблюдение поставлено $N = 20$ приборов. За время испытания ($T = 2000$ ч) отказало восемь приборов, время наработки до отказа каждого из них, равные $x_i$, приведены в предыдущей задаче. Известно, что наработки подчинены экспоненциальному закону. Необходимо определить оценку $\hat{\lambda}$ параметра $\lambda$.

**Решение:**

Для данного типа наблюдений справедлива формула

$$\hat{\lambda} = \frac{d}{\sum_{i=1}^{d} x_i + (N-d)T},$$

где $d$ - количество отказавших приборов. Из задачи 5 имеем $\sum_{i=1}^{d} x_i = 4820$. Подставляя заданные величины в формулу для $\hat{\lambda}$, находим:

$$\hat{\lambda} = \frac{8}{4820 + (20-8)\cdot 2000} = \frac{8}{28820} = 0.00028 \ \ (1/\div).$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(\tilde{o}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3OH | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 3219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0043 |
| 3,0 | 0,004 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |

Продолжение таблицы значений функции $\varphi(\tilde{o}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Критические точки распределения $\chi^2$ Пирсона

| Число степеней свободы k | Уровень значимости α | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 1 | 6.6 | 5.0 | 3.8 | 0.0039 | 0.00098 | 0.00016 |
| 2 | 9.2 | 7.4 | 6.0 | 0.103 | 0.051 | 0.020 |
| 3 | 11.3 | 9.4 | 7.8 | 0.352 | 0.216 | 0.115 |
| 4 | 13.3 | 11.1 | 9.5 | 0.711 | 0.484 | 0.297 |
| 5 | 15.1 | 12.8 | 11.1 | 1.15 | 0.831 | 0.554 |
| 6 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 1.64 | 1.24 | 0.872 |
| 7 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 2.17 | 1.69 | 1.24 |
| 8 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 2.73 | 2.18 | 1.65 |
| 9 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 3.33 | 2.70 | 2.09 |
| 10 | 23.2 | 20.5 | 18.3 | 3.94 | 3.25 | 2.56 |
| 11 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 4.57 | 3.82 | 3.05 |
| 12 | 26.2 | 23.3 | 21.0 | 5.23 | 4.40 | 3.57 |
| 13 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 5.89 | 5.01 | 4.11 |
| 14 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 6.57 | 5.63 | 4.66 |
| 15 | 30.6 | 27.5 | 25.0 | 7.26 | 6.26 | 5.23 |
| 16 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 7.96 | 6.91 | 5.81 |
| 17 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 8.67 | 7.56 | 6.41 |
| 18 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 9.39 | 8.23 | 7.01 |
| 19 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 10.1 | 8.91 | 7.63 |
| 20 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 10.9 | 9.59 | 8.26 |
| 21 | 38.9 | 35.5 | 32.7 | 11.6 | 10.3 | 8.90 |
| 22 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 12.3 | 11.0 | 9.54 |
| 23 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 13.1 | 11.7 | 10.2 |
| 24 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 13.8 | 12.4 | 10.9 |
| 25 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 14.6 | 13.1 | 11.5 |
| 26 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 15.4 | 13.8 | 12.2 |
| 27 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 |
| 28 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 16.9 | 15.3 | 13.6 |
| 29 | 49.6 | 45.7 | 42.6 | 17.7 | 16.0 | 14.3 |
| 30 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 18.5 | 16.8 | 15.0 |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения Стьюдента $t_{\alpha,k}$

| Число степеней свободы $k$ | Уровень значимости α (двусторонняя критическая область) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.002 | 0.001 |
| 1 | 6.31 | 12.7 | 31 .82 | 63.7 | 318.3 | 637.0 |
| 2 | 2.92 | 4.30 | 6.97 | 9.92 | 22.33 | 31.6 |
| 3 | 2.35 | 3.18. | 4.54 | 5.84 | 10.22 | 12.9 |
| 4 | 2.13 | 2.78 | 3.75 | 4.60 | 7.17 | 8.61 |
| 5 | 2.01 | 2.57 | 3.37 | 4.03 | 5.89 | 6.86 |
| 6 | 1.94 | 2.45 | 3.14 | 3.71 | 5.21 | 5.96 |
| 7 | 1.89 | 2.36 | 3.00 | 3.50 | 4.79 | 5.40 |
| 8 | 1.86 | 2.31 | 2.90 | 3.36 | 4.50 | 5.04 |
| 9 | 1..83 | 2.26 | 2.82 | 3.25 | 4.30 | 4.78 |
| 10 | 1.81 | 2.23 | 2.76 | 3.17 | 4.14 | 4.59 |
| 11 | 1.80 | 2.20 | 2.72 | 3.11 | 4.03 | 4.44 |
| 12 | 1.78 | 2.18 | 2.68 | 3.05 | 3.93 | 4.32 |
| 13 | 1.77 | 2.16 | 2.65 | 3.01 | 3.85 | 4.22 |
| 14 | 1.76 | 2.14 | 2.62 | 2.98 | 3.79 | 4.14 |
| 15 | 1.75 | 2.13 | 2.60 | 2.95 | 3.73 | 4.07 |
| 16 | 1.75 | 2.12 | 2.58 | 2.92 | 3.69 | 4.01 |
| 17 | 1.74 | 2.11 | 2.57 | 2.90 | 3.65 | 3.96 |
| 18 | 1.73 | 2.10 | 2.55 | 2.88 | 3.61 | 3.92 |
| 19 | 1.73 | 2.09 | 2.54 | 2.86 | 3.58 | 3.88 |
| 20 | 1.73 | 2.09 | 2.53 | 2.85 | 3.55 | 3.85 |
| 21 | 1.72 | 2.08 | 2.52 | 2.83 | 3.53 | 3.82 |
| 22 | 1.72 | 2.07 | 2.51 | 2.82 | 3.51 | 3.79. |
| 23 | 1.71 | 2.07 | 2.50 | 2.81 | 3.49 | 3.77 |
| 24 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.80 | 3.47 | 3.74 |
| 25 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.79 | 3.45 | 3.72 |
| 26 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.78 | 3.44 | 3.71 |
| 27 | 1.71 | 2.05 | 2.47 | 2.77 | 3.42 | 3.69 |
| 28 | 1.70 | 2.05 | 2.46 | 2.76 | 3.40 | 3.66 |
| 29 | 1.70 | 2.05 | 2.46 | 2.76 | 3.40 | 3.66 |
| 30 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.75 | 3.39 | 3.65 |
| 40 | 1.68 | 2.02 | 2.42 | 2.70 | 3.31 | 3.55 |
| 60 | 1.67 | 2.00 | 2.39 | 2.66 | 3.23 | 3.46 |
| 120 | 1.66 | 1.98 | 2.36 | 2.62 | 3.17 | 3.37 |
| ∞ | 1.64 | 1.96 | 2.33 | 2.58 | 3.09 | 3.29 |
| | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
| | Уровень значимости α (односторонняя критическая область) | | | | | |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Значения функции Лапласа $\hat{O}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dz$

| *Z* | *Φ(z)* | *Z* | *Φ(z)* | *Z* | *Φ(z)* | *Z* | *Φ(z)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 1.6 | 0.9452 | -3 | 0.0013 | -1.4 | 0.0803 |
| 0.1 | 0.5398 | 1.7 | 0.9554 | -2.9 | 0.0019 | -1.3 | 0.0968 |
| 0.2 | 0.5793 | 1.8 | 0.9641 | -2.8 | 0.0026 | -1.2 | 0.1151 |
| 0.3 | 0.6179 | 1.9 | 0.9713 | -2.7 | 0.0035 | -1.1 | 0.1357 |
| 0.4 | 0.6554 | 2.0 | 0.9772 | -2.6 | 0.0047 | -1.0 | 0.1587 |
| 0.5 | 0.6915 | 2.1 | 0.9821 | -2.5 | 0.0062 | -0.9 | 0.1841 |
| 0.6 | 0.7257 | 2.2 | 0.9861 | -2.4 | 0.0082 | -0.8 | 0.2119 |
| 0.7 | 0.7580 | 2.3 | 0.9893 | -2.3 | 0.0107 | -0.7 | 0.2420 |
| 0.8 | 0.7881 | 2.4 | 0.9918 | -2.2 | 0.0139 | -0.6 | 0.2743 |
| 0.9 | 0.8159 | 2.5 | 0.9838 | -2.1 | 0.0179 | -0.5 | 0.3085 |
| 1.0 | 0.8413 | 2.6 | 0.9953 | -2.0 | 0.0228 | -0.4 | 0.3446 |
| 1.1 | 0.8643 | 2.7 | 0.9965 | -1.9 | 0.0287 | -0.3 | 0.3821 |
| 1.2 | 0.8849 | 2.8 | 0.9974 | -1.8 | 0.0359 | -0.2 | 0.4207 |
| 1.3 | 0.9032 | 2.9 | 0.9981 | -1.7 | 0.0446 | -0.1 | 0.4602 |
| 1.4 | 0.9192 | 3.0 | 0.9987 | -1.6 | 0.0548 | -0.0 | 0.5000 |
| 1.5 | 0.9332 | | - | -1.5 | 0.0668 | | |

## Список литературы

1. Сидняев Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник/Н.И.Сидняев. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011. – 219 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика/Под ред. А.В.Ефимова – М.: Наука, 1990. – 428 с.

3. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей/Под ред. А.А.Свешникова – Ленинград: Судпромгиз, 1962. – 423 с.

4. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике/Е.И.Гурский – Минск: Высшая школа, 1975. – 250 с.

5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/Под ред. А.А.Свешникова – М.: Наука, 1970. – 656 с.

6. Закс Л. Статистическое оценивание/Л.Закс – М.: Статистика, 1976. – 598 с.