Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Д. А. МЕЛЬНИКОВ, А. В. ФИЛИНОВСКИЙ, В. Ю. ЧУЕВ

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2000

Московский государственный технический университет
им. Н.Э.Баумана

Д.А.Мельников, А.В.Филиновский, В.Ю.Чуев

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания к выполнению
типового расчета

Издательство МГТУ им.Н.Э.Баумана

1997

ББК 22.161.1
М48

Рецензент О.И.Ткачев

М48 Мельников Д.А., Филиновский А.В., Чуев В.Ю. Кратные интегралы: Методические указания к выполнению типового расчета. – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 56 с., ил.

В методических указаниях изложены краткие теоретические сведения и даны решения примеров по теме "Кратные интегралы". Приведены условия типового расчета, в котором содержатся задачи на вычисление кратных интегралов и их геометрические и механические приложения.

Для студентов 2-го курса всех специальностей факультетов РК, МТ, Э, ИБМ, ФН-2. Могут быть полезны преподавателям.

Ил. 28.

ББК 22.161.1

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Определение двойного интеграла

Пусть в плоскости XOY задана замкнутая область D, имеющая площадь S, ограниченная непрерывной линией L, и пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x;y)$.

Разобьем область D какими-нибудь линиями на n частей D_1, D_2, ..., D_n таким образом, что никакие две из них не будут иметь общих внутренних точек. Очевидно, что $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.

Определение. Такое представление области D называется ее разбиением T (рис. 1.1).

Сами же множества D_1, D_2, ..., D_n назовем элементарными областями. Их площади обозначим ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. Очевидно, что $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

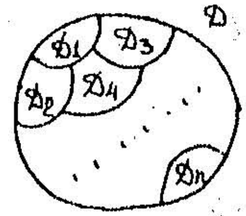

Рис. 1.1

Определение. Диаметром области D называется максимальное расстояние между ее точками, т.е.

$$\delta(D)=\max_{P_1;P_2\in D} \delta(P_1;P_2).$$

Определение. Диаметром разбиения T области D называется наибольший из диаметров ее элементарных областей, т.е.

$$\delta(T)=\max_{i=1\ldots n} \delta(D_i).$$

Возьмем теперь в каждой из элементарных областей по одной точке $P_i \in D_i$ и составим сумму

$$\sigma_f(T) = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i,$$

которую назовем интегральной суммой для функции $z=f(x;y)$ на замкнутой области D, соответствующей разбиению T.

Геометрический смысл интегральной суммы $\sigma_f(T)$ при $f(x;y) \geq 0$ очевиден: это сумма объемов прямых цилиндров с основаниями D_1, D_2, ..., D_n (их площади $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ соответственно) и высотами $f(P_1)$, $f(P_2)$, ..., $f(P_n)$ (рис. 1.2).

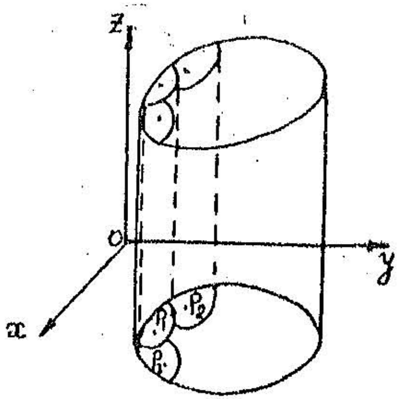

Рис. I.2

Рассмотрим некоторую последовательность разбиений области D, для которой $\delta(T)\to 0$. При этом $n\to\infty$.

Определение. Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по замкнутой области D называется предел последовательности интегральных сумм $\sigma_f(T)$ при стремлении диаметра разбиения к нулю, если этот предел существует и не зависит как от выбора разбиения области, так и от выбора точек на элементарных областях, составляющих данное разбиение, т.е.

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy=\lim_{\delta(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i . \qquad (1.1)$$

При этом область D называется областью интегрирования, $f(x;y)$ - подынтегральной функцией, x , y - переменными интегрирования.

Определение. Если для функции $f(x;y)$ существует конечный предел (1.1), то функция $f(x;y)$ называется интегрируемой на области D .

Теорема существования двойного интеграла. Любая непрерывная на замкнутой ограниченной двумерной области функция двух переменных является интегрируемой на этой области.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если $f(x;y)\geqslant 0$, то двойной интеграл от функции $f(x;y)$ по области D равен объему тела Q, ограниченного поверхностью $z=f(x;y)$, прямым цилиндром, проектирующим эту поверхность на координатную плоскость XOY в область D этой координатной плоскости и самой плоскостью XOY.

Определение. Тело Q называется цилиндрическим телом.

Механический смысл двойного интеграла. Массу плоской пластинки D с плотностью $\mu(x;y)$ вычисляют по следующей формуле:

$$M=\iint\limits_D \mu(x;y)\,dx\,dy.$$

1.2. Свойства двойного интеграла

1. Линейность.

Если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ - интегрируемые функции на замкнутой ограниченной области D , то

$$\iint\limits_D [f(x;y)+g(x;y)]\,dx\,dy=\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy+\iint\limits_D g(x;y)\,dx\,dy,$$

а при $\forall\ \alpha\in R$

$$\iint\limits_D \alpha f(x;y)\,dx\,dy=\alpha\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy,$$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

2. Аддитивность.

Если замкнутая ограниченная область D представлена в виде объединения конечного числа подмножеств D_1 , D_2 , ..., D_n , таких, что никакие два из них не имеют общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{D_i} f(x;y)\,dx\,dy.$$

3. Теорема об оценке двойного интеграла.

Пусть m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x;y)$ в области D, S - ее площадь. Тогда имеет место соотношение

$$mS\leqslant\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy\leqslant MS.$$

4. Теорема о среднем для двойного интеграла.

Если функция $f(x;y)$ непрерывна на замкнутой ограниченной области D с площадью S , то в области D найдется такая точка P, что

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy=f(P)S.$$

1.3. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Определение. Двумерная область D называется правильной по оси OY, если каждая прямая, параллельная оси OY ($x=\text{const}$), пересекает ее границу не более чем в двух точках, верхней $P_2(x;y_2)$ и нижней $P_1(x';y_1)$, причем $y_1 \leqslant y_2$ (рис. I.3). Множество всех верхних точек P_2 образует верхнюю границу.

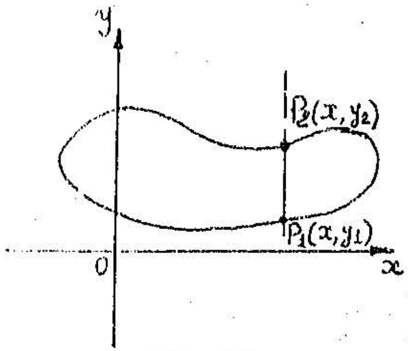

Рис. I.3

Пусть $y=\varphi(x)$ - уравнение нижней границы области D, $y=\psi(x)$ - уравнение ее верхней границы, а отрезок $[a;b]$ - проекция области D на ось OX. Тогда правильная по оси OY область D задается следующей системой неравенств:

$$D: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b; \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x). \end{cases} \qquad (I.2)$$

Двойной интеграл по области D, заданный системой неравенств (I.2), вычисляют сведением к повторному интегралу, т.е.

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy\Big]dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy.$$

Сперва вычисляют внутренний интеграл, т.е.

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy. \qquad (I.3)$$

При этом величину x считают постоянной (параметром), а результатом вычисления интеграла (I.3) является некоторая функция переменной x, которую затем интегрируют на отрезке $[a;b]$.

Если область D не является правильной по оси OY, но ее можно разбить на конечное число правильных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, то нужно сделать это разбиение и вычислить каждый интеграл с помощью повторного интеграла (рис. I.4):

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy + \ldots + \iint\limits_{D_n} f(x;y)\,dx\,dy. \qquad (I.4)$$

Если же одна из границ области D (например, верхняя) не задается одним уравнением на всем отрезке $[a;b]$, то область D разбивают вертикальными прямыми на несколько областей таким образом, что у каждой из них нижняя и верхняя границы задаются одним уравнением (рис. I.5):

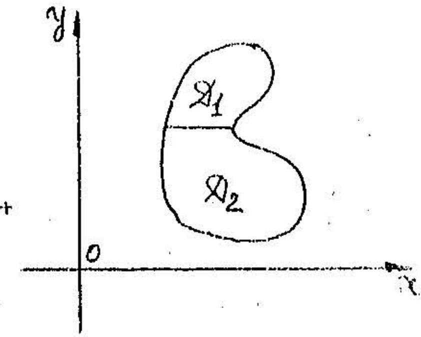

Рис. I.4

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi_1(x)} f(x;y)\,dy + \int\limits_c^d dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi_2(x)} f(x;y)\,dy + \int\limits_d^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi_3(x)} f(x;y)\,dy.$$

Двойной интеграл можно вычислить сведением к повторному и в другой последовательности интегрирования (т.е. сначала по переменной x, а затем по переменной y).

Определение. Двумерная область D называется правильной по оси OX, если каждая прямая, параллельная оси OX ($y=\text{const}$), пересекает ее границу не более чем в двух точках: левой $P_1(x_1;y)$ и правой $P_2(x_2;y)$, причем $x_1 \leqslant x_2$. Множество всех левых точек P_1 образует левую границу области D, а множество всех правых точек P_2 - ее правую границу.

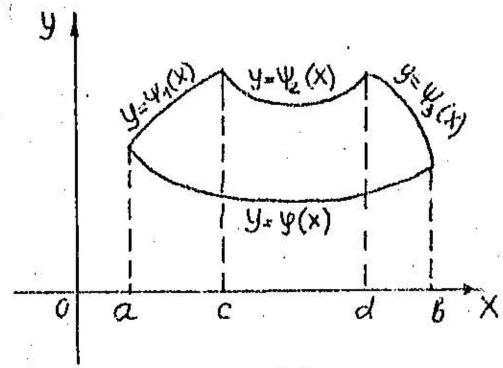

Рис. I.5

Пусть $x = \alpha(y)$ - уравнение левой границы области D, $x = \beta(y)$ - уравнение ее правой границы, а отрезок $[c; d]$ - ее проекция на ось OY. Тогда область D задается системой неравенств:

$$D: \begin{cases} c \le y \le d, \\ \alpha(y) \le x \le \beta(y). \end{cases} \qquad (I.5)$$

Двойной интеграл по правильной оси OX области D, заданной системой неравенств (I.5), вычисляют с помощью повторного, но взятого в обратном порядке, т.е.

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;y)\,dx\Big] dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;y)\,dx.$$

Если же область D не является правильной по оси OX или хотя бы одна из ее границ не задается одним уравнением, то ее следует разбить горизонтальными прямыми на несколько областей и вычислить интеграл по каждой из них согласно формуле (I.4).

Если область D является правильной (т.е. правильной и по оси OX, и по оси OY), то двойной интеграл может быть вычислен любым из двух способов:

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;y)\,dx.$$

При этом оптимальным выбором порядка интегрирования можно существенно упростить процесс вычисления интеграла.

Пример I.1. Перейти двумя способами к повторному интегралу от двойного интеграла

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy$$

по области D, заданной неравенствами

$$y \le \frac{x^2}{2}; \quad y \ge x^2 - 2; \quad y \ge 2x - 2.$$

Решение. Область D (рис. I.6) является правильной по оси OY, ее проекцией на ось OX является отрезок $[-2;2]$, уравнение верхней границы есть $y = x^2/2$, а нижняя граница определена равенством

$$y = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{при} \quad x \in [-2;0], \\ 2x - 2 & \text{при} \quad x \in [0;2]. \end{cases}$$

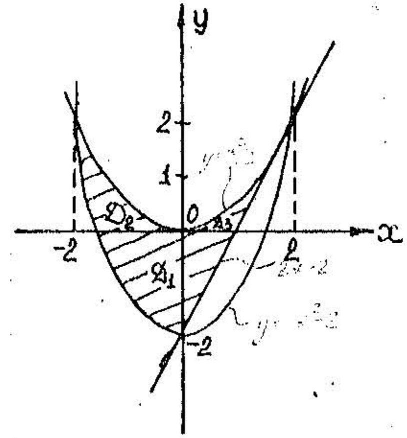

Рис. I.6

Поэтому данный интеграл записываем следующим образом:

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} dx \int_{x^2-2}^{x^2/2} f(x;y)\,dy + \int_0^2 dx \int_{2x-2}^{x^2/2} f(x;y)\,dy.$$

Отметим, что при расстановке пределов интегрирования в обратном порядке область D не является правильной по оси OX, поэтому ее следует разбить на подобласти таким образом, чтобы правая и левая границы этих подобластей задавались одной формулой. Таким разбиением является разбиение области D на подобласти D_1, D_2 и D_3 (см. рис. I.6), описания границ которых см. в табл. I.

Таблица I

Подобласть	Проекция на ось	Уравнение левой границы	Уравнение правой границы
D_1	$[-2;0]$	$x = -\sqrt{y+2}$	$x = 1 + \frac{y}{2}$
D_2	$[0;2]$	$x = -\sqrt{y+2}$	$x = -\sqrt{2y}$
D_3	$[0;2]$	$x = \sqrt{2y}$	$x = 1 + \frac{y}{2}$

Теперь можно расставить пределы интегрирования:

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+2}}^{1+y/2} f(x;y)\,dx + \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y+2}}^{-\sqrt{2y}} f(x;y)\,dx + \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{1+y/2} f(x;y)\,dx.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy=\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{x^2-2}^{x^2/2}f(x;y)\,dy+\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{2x-2}^{x^2-2}f(x;y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{y+2}}^{1+y/2}f(x;y)\,dx+\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{y+2}}^{-\sqrt{2y}}f(x;y)\,dx+\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{\sqrt{2y}}^{1+y/2}f(x;y)\,dx.$$

Пример I.2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{x^2}dx\,dy$ по области D, заданной неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant x$.

Решение. Область D является правильной по оси OX и по оси OY (рис. I.7), поэтому данный интеграл в виде повторного можно представить двумя способами:

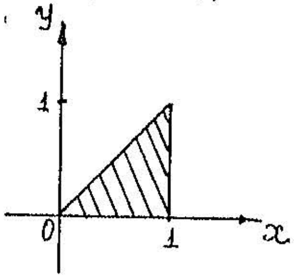

Рис. I.7

$$\iint\limits_D e^{x^2}dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 e^{x^2}dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x e^{x^2}dy.$$

Однако первым способом вычислить двойной интеграл невозможно, так как $\int e^{x^2}dx$ не выражается в элементарных функциях. Таким образом, данный двойной интеграл нужно вычислять в другой последовательности интегрирования, т.е.

$$\iint\limits_D e^{x^2}dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x e^{x^2}dy=\int\limits_0^1 dx\,e^{x^2}y\Big|_0^x=\int\limits_0^1 x\,e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2}dx^2=$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{1}{2}(e-1).$$

1.4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функции $x=x(u;v)$ и $y=y(u;v)$ взаимно однозначно отображают область D' плоскости UOV в область D плоскости XOY, причем функции $x=x(u;v)$ и $y=y(u;v)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области D', и якобиан I этого отображения нигде не обращается в нуль кроме, может быть, конечного числа линий, т.е.

$$I(x;y)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}f(x(u;v);\,y(u;v))\,|I|\,du\,dv.$$

Геометрический смысл якобиана. Если якобиан отображения отличен в точке $P_0(u_0;v_0)$ от нуля, то он равен отношению площади образа прямоугольника с бесконечно малыми сторонами, содержащего точку P_0, к площади самого прямоугольника. Другими словами, якобиан равен коэффициенту изменения площади бесконечно малой фигуры.

Как правило, переход к новым переменным в двойном интеграле производят для изменения области интегрирования и упрощения процесса вычисления интеграла.

При решении задач с применением кратных интегралов следует:

1) составить интеграл в декартовой системе координат, не расставляя пределов интегрирования;

2) исходя из подынтегральной функции и области интегрирования выбрать подходящую систему координат;

3) подставить новые переменные и якобиан в подынтегральную функцию;

4) выписать уравнения границ и записать их в новых координатах;

5) построить область D' в новых координатах;

6) выбрать порядок интегрирования и расставить пределы интегрирования в новых координатах по области D';

7) вычислить получившийся интеграл.

Наряду с декартовыми координатами на плоскости широко используют полярную систему координат:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}$$

Отметим, что $\rho^2=x^2+y^2$; $\operatorname{tg}\varphi=y/x$; $\rho\in[0;+\infty)$. Полярный угол φ может изменяться в пределах $\varphi\in(-\infty;+\infty)$. Но при вычислении кратных интегралов в связи с требованием взаимной однозначности отображения в полярной системе координат накладывают ограничения на полярный угол φ, т.е.

$$\varphi\in[\varphi_0;\varphi_0+2\pi],$$

где φ_0 выбирают исходя из условия задачи.

Якобиан этого отображения

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho.$$

Поэтому

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

где D' - образ области D в полярных координатах.

1. Расстановка пределов в полярных координатах.

Определение. Область D называется радиально-правильной, если каждый радиус-луч, выходящий из полюса ($\varphi=\mathrm{const}$), пересекает ее границу не более чем в двух точках: $P_1(\varphi;\rho_1)$ и $P_2(\varphi;\rho_2)$, $\rho_1\le\rho_2$, причем в точке P_1 луч "входит" в область D, а в точке P_2 луч "выходит" из области D (рис. 1.8).

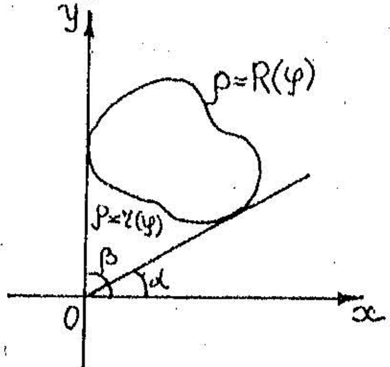

Рис. 1.8

Множество всех точек "входа" образует внутреннюю границу области D. Пусть ее уравнение есть $\rho = r(\varphi)$. Множество всех точек "выхода" образует внешнюю границу области, ее уравнение $\rho=R(\varphi)$. Если α и β - соответственно наименьшее и наибольшее значения полярного угла φ, при которых радиус-луч $\varphi=\mathrm{const}$ имеет хотя бы одну общую точку с областью D, то ее можно задать неравенствами

$$D:\ \begin{cases} \alpha\le\varphi\le\beta, \\ r(\varphi)\le\rho\le R(\varphi), \end{cases}$$

а двойной интеграл по области D сводится в полярных координатах к повторному:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r(\varphi)}^{R(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

Замечание. Точкой входа будем считать полюс, если начало радиус-луча $\varphi=\mathrm{const}$ (полюс) лежит внутри области D. В этом случае уравнение внутренней границы имеет вид $\rho=0$.

Если область интегрирования не является радиально-правильной, то ее следует разбить лучами $\varphi=\mathrm{const}$ или кривыми $\rho=\mathrm{const}$ на несколько подобластей, каждая из которых является радиально-правильной (рис. 1.9).

Если же одна из границ области D (например, внутренняя) не задается одним уравнением на всем промежутке $\varphi\in[\alpha;\beta]$, то область D разбивается радиус-лучами на несколько подобластей таким образом, что у каждой из них внутренняя и внешняя границы задаются одним уравнением (рис. 1.10):

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = $$

$$=\int_\alpha^\gamma d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{R(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho+\int_\gamma^\beta d\varphi\int_{r_2(\varphi)}^{R(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

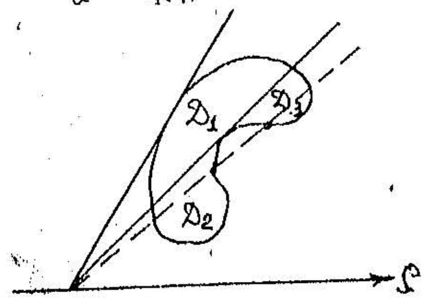

Рис. 1.9

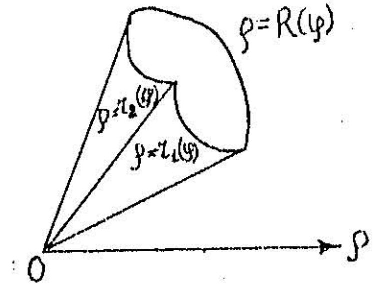

Рис. 1.10

Пример 1.3. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область D задана неравенствами $x^2+y^2\le4$; $x^2+y^2+2y\ge0$; $x\ge0$.

Решение. Область D представлена на рис. 1.11. Перейдем к полярным координатам, поскольку область интегрирования и подынтегральная функция удобны для вычисления именно в этой системе координат. Область ограничена лучами $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$. Выразим уравнения границ области D в полярных координатах:

а) $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=2$;

б) $x^2+y^2+2y=0 \Leftrightarrow \rho^2+2\rho\sin\varphi=0 \Leftrightarrow \rho=-2\sin\varphi$;

в) $x=0 \Leftrightarrow \varphi=-\frac{\pi}{2}$ или $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (в данном случае $\varphi=\frac{\pi}{2}$).

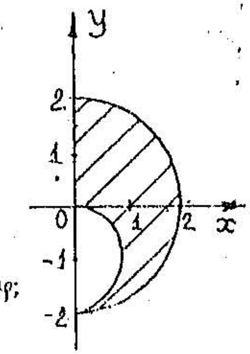

Рис. 1.11

Уравнение внутренней границы:

$$r(\varphi)=\begin{cases}-2\sin\varphi; & -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0,\\ 0; & 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Уравнение внешней границы:

$$R(\varphi)=2.$$

Подынтегральная функция в полярных координатах:

$$f(x;y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{\rho^2}}=\frac{1}{\rho}.$$

Теперь вычислим данный интеграл:

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi\int_{-2\sin\varphi}^{2}\frac{1}{\rho}\rho\,d\rho+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2\frac{1}{\rho}\rho\,d\rho=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi\int_{-2\sin\varphi}^2 d\rho+\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 d\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(2+2\sin\varphi)\,d\varphi+\int_0^{\pi/2}2\,d\varphi=$$

$$=(2\varphi-2\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0+2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=0-2-2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0+2\cdot\frac{\pi}{2}-0=2\pi-2.$$

2. Использование других видов координат для вычисления двойных интегралов.

В отдельных задачах целесообразно использование обобщенных полярных координат:

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi\\ y=b\rho\cos\varphi\end{cases}\iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Эту систему координат удобно,в частности, использовать, когда область интегрирования представляет собой эллипс или его часть. В этих координатах уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$ превращается в уравнение $\rho=1$. Якобиан этой системы

$$I=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\varphi\\ y'_\rho & y'_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=ab\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=ab\rho.$$

При $a=b=1$ получаем обычные полярные координаты.

Пример I.4. Вычислить интеграл $\iint_D y\,dx\,dy$, где область D ограничена неравенствами $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 1$, $y\ge 0$.

Решение. Область D представлена на рис. I.12. Перейдем к обобщенным полярным координатам:

$$\begin{cases}x=5\rho\cos\varphi,\\ y=3\rho\sin\varphi.\end{cases}$$

В новых координатах область интегрирования задается неравенствами:

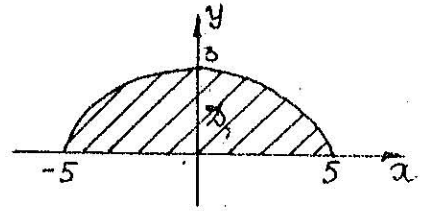

Рис. I.12

$$\begin{cases}0\le\varphi\le\pi,\\ 0\le\rho\le 1.\end{cases}$$

Якобиан этого отображения:

$$I=ab\rho=15\rho.$$

Подынтегральная функция в новых координатах: $y=3\rho\sin\varphi$.

Вычисляем интеграл:

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 3\rho\sin\varphi\cdot 15\rho\,d\rho=\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 45\rho^2\,d\rho=$$

$$=15\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\,\rho^3\Big|_0^1=15\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi=-15\cos\varphi\Big|_0^\pi=-15(-1-1)=30.$$

Иногда применяются и другие типы координат, если в них уравнения области значительно упрощаются.

Пример I.5. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^4\,dx\,dy$ по области D , если область D ограничена линиями $2y-x^2=0$; $y-4x^2=0$; $2xy-1=0$; $xy-4=0$.

Решение. Область D представлена на рис. I.13а.

Введем новые координаты $u=xy$, $v=y/x^2$.

В этих координатах границы области D' примут следующий вид:

$$x^2-2y=0\iff y/x^2=1/2\iff v=1/2;$$

$$y-4x^2=0\iff y/x^2=4\iff v=4;$$

$$2xy-1=0\iff xy=1/2\iff u=1/2;$$

$$xy-4=0\iff xy=4\iff u=4.$$

т.е. в координатах u , v данная область D' представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (рис. 13б).

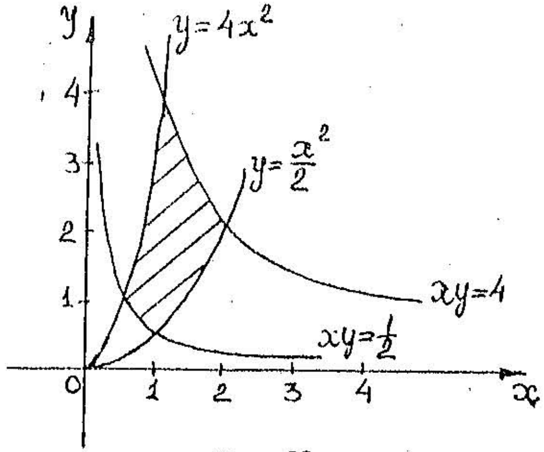

Рис. 13а

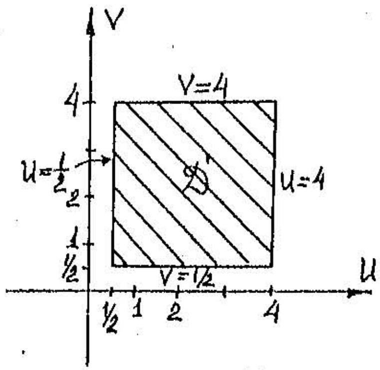

Рис. 13б

Для вычисления якобиана данного отображения выразим x и y через u и v :

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u}{v} = x^3 \\ u^2 v = y^3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{u^{1/3}}{v^{1/3}}, \\ y = \sqrt[3]{u^2 v} = u^{2/3} v^{1/3}. \end{cases}$$

Теперь вычислим якобиан:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3u^{2/3}v^{1/3}} & -\dfrac{u^{1/3}}{3v^{4/3}} \\ \dfrac{2v^{1/3}}{3u^{1/3}} & \dfrac{u^{2/3}}{3v^{2/3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9v} + \frac{2}{9v} = \frac{1}{3v}.$$

Подынтегральную функцию также выразим через u и v :

$$f(x;y) = xy^4 = \frac{u^{1/3}}{v^{1/3}}\, u^{8/3} v^{4/3} = u^3 v.$$

Вычисляем интеграл:

$$\iint\limits_D xy^4\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} u^3 v \cdot \frac{1}{3v}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int\limits_{1/2}^{4} du \int\limits_{1/2}^{4} u^3 dv =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{1/2}^{4} u^3 v \Big|_{1/2}^{4} du = \frac{1}{3}\int\limits_{1/2}^{4} \left(4 - \frac{1}{2}\right) u^3 du = \frac{7}{6}\cdot \frac{u^4}{4}\Big|_{1/2}^{4} = \frac{7}{6}\left(64 - \frac{1}{64}\right) = \frac{7}{6}\cdot\frac{4095}{64} = \frac{9555}{128}.$$

1.5. Приложения двойного интеграла

1. Площадь плоской области.

Площадь плоской области D вычисляют по формуле

$$S(D) = \iint\limits_D dx\,dy.$$

Пример 1.6. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Решение. Для построения фигуры и вычисления ее площади перейдем к полярным координатам:

$$(\rho^2 - a\rho\cos\varphi)^2 = a^2\rho^2 \Rightarrow (\rho - a\cos\varphi)^2 = a^2.$$

Окончательно получим

$$\rho - a\cos\varphi = a \quad \text{или} \quad \rho = a(1+\cos\varphi)$$

(так как второе решение $\rho - a\cos\varphi = -a$ приводит к $\rho = -a(1-\cos\varphi) < 0$)

Искомая область представлена на рис. 1.14. Теперь можно вычислить ее площадь:

$$S(D) = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho\,d\rho = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{2}.$$

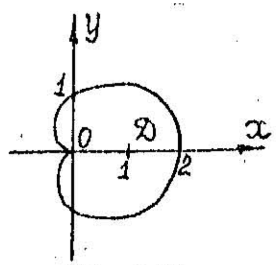

Рис. I.14

2. Площадь поверхности.

Пусть дана поверхность σ, которая в декартовой системе координат описывается уравнением $z=f(x;y)$, где $f(x;y)$ - непрерывно дифференцируемая функция, заданная в двумерной области D_0. Тогда площадь части поверхности, проектирующейся на плоскость XOY в область $D\subseteq D_0$, вычисляют по формуле

$$S(\sigma)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Пример 1.7. Найти площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезаемой сферой $x^2+(y-2)^2+z^2=4$ (рис. 1.15).

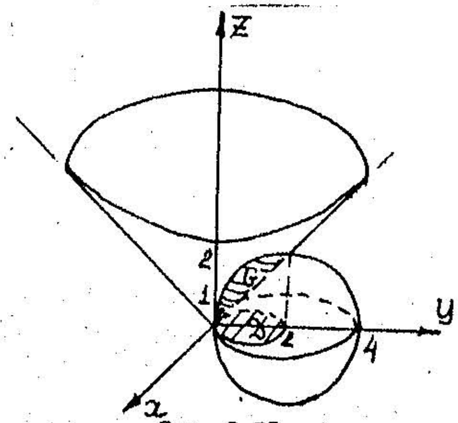

Рис. 1.15

Решение. Найдем уравнение проекции линии пересечения конуса и сферы на плоскость XOY, для чего выразим z из первого уравнения и подставим во второе:

$$x^2+(y-2)^2+(x^2+y^2)=4\Rightarrow x^2+y^2-4y+4+x^2+y^2=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2y=0.$$

Окончательно получим $x^2+(y-1)^2=1$ или $\rho=2\sin\varphi$ в полярных координатах.

Это окружность радиуса $R=1$ с центром в точке $O_1(0;1)$.

Из уравнения поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$ получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=2.$$

Поэтому искомая площадь

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\rho\,d\rho=\sqrt{2}\int_0^{\pi}2\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=\sqrt{2}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi\sqrt{2}.$$

3. Объем тела.

Объем пространственного тела G, заданного неравенствами и $h(x;y)\le z\le H(x;y)$ и проектирующегося на плоскость XOY в область D, вычисляют по формуле

$$V=\iint_D[H(x;y)-h(x;y)]\,dx\,dy.$$

Пример 1.8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=y^2$; $z=x$; $x=4$.

Решение. Искомое тело G представлено на рис. 1.16. Его проекцией на плоскость XOY является двумерная область D, ограниченная параболой $x=y^2$ и прямой $x=4$ (рис. 1.17).

Теперь можно вычислить объем тела G:

$$V=\int_{-2}^{2}dy\int_{y^2}^{4}(x-y^2)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}-xy^2\right)\Big|_{y^2}^{4}dy=\int_{-2}^{2}\left(8-\frac{y^4}{2}-4y^2+y^4\right)dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(8-4y^2+\frac{y^4}{2}\right)dy=\int_{0}^{2}(16-8y^2+y^4)dy=\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2=$$

$$=32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}=\frac{480-320+96}{15}=\frac{256}{15}.$$

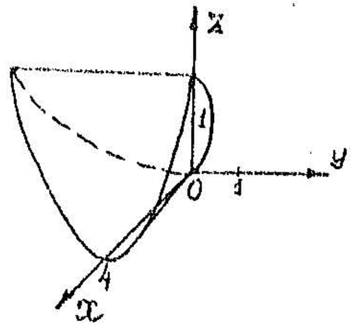

Рис. I.16

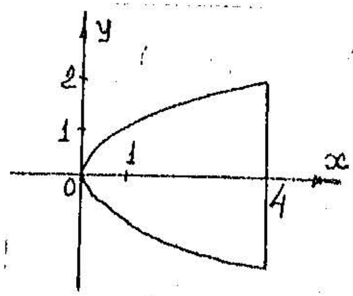

Рис. I.17

4. Координаты центра масс $P_0(x_0;y_0)$.

Эти координаты для плоской пластинки D с плотностью $\mu(x;y)$ определяют следующим образом:

$$x_0=\frac{M_y}{M}\quad;\quad y_0=\frac{M_x}{M},$$

где

$$M_y=\iint_D x\mu(x;y)\,dx\,dy$$

– статический момент пластинки относительно оси OY;

$$M_x=\iint_D y\mu(x;y)\,dx\,dy$$

– статический момент пластинки относительно оси OX.

Пример I.9. Найти массу и координаты центра масс пластинки, имеющей форму четверти круга: $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, если ее плотность $\mu(x;y)=xy$.

Решение. Для решения задачи перейдем к полярным координатам. Сначала найдем массу пластинки:

$$M=\iint_D \mu(x;y)\,dx\,dy=\iint_D xy\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi\,\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^3d\rho=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 4=2.$$

Статический момент пластинки относительно оси OY:

$$M_y=\iint_D x\mu(x;y)\,dx\,dy=\iint_D x^2y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\sin\varphi\,\rho\,d\rho=$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d(\cos\varphi)\int_0^2\rho^4d\rho=\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{32}{5}=\frac{32}{15}.$$

Аналогично находим статический момент пластинки относительно оси OX:

$$M_x=\iint_D y\mu(x;y)\,dx\,dy=\iint_D xy^2\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\,\rho^2\sin^2\varphi\,\rho\,d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d(\sin\varphi)\int_0^2\rho^4d\rho=\left(\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{32}{5}=\frac{32}{15}.$$

Теперь можно найти координаты центра масс пластинки:

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{32}{15\cdot 2}=\frac{16}{15}\quad;\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{32}{15\cdot 2}=\frac{16}{15}.$$

5. Моменты инерции плоской пластинки D.

Эти моменты:

а) относительно координатных осей $OX(I_x)$ и $OY(I_y)$

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x;y)\,dx\,dy;$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x;y)\,dx\,dy;$$

б) относительно начала координат O

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x;y)\,dx\,dy=I_x+I_y.$$

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Определение тройного интеграла

Пусть G - замкнутая область в трехмерном пространстве, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Γ. Разобьем G на элементарные подобласти G_1, G_2, ..., G_n таким образом, что никакие две из них не будут иметь общих внутренних точек, $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

Определение. Представление области G в виде объединения элементарных областей G_1, ..., G_n называется разбиением T области G.

Объемы элементарных областей обозначим через $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$.

Определение. Диаметром области называется максимальное расстояние между ее точками $\delta(G) = \max\limits_{P_1, P_2 \in G} \delta(P_1, P_2)$.

Определение. Диаметром разбиения T называется максимальный из диаметров элементарных областей $\delta(T) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \delta(G_i)$.

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области G. Выберем в каждой из элементарных областей точку $P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$ и составим сумму:

$$\sigma_f(T) = f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + \ldots + f(P_n)\Delta V_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i ,$$

которую назовем интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$, соответствующей разбиению T.

Рассмотрим некоторую последовательность разбиений T_m области G, для которой $\delta(T_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ (очевидно, что $n \to \infty$ при $m \to \infty$).

Определение. Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области G называется предел последовательности интегральных сумм $\sigma_f(T_m)$ при $\delta(T_m) \to 0$, $m \to \infty$, если этот предел существует и не зависит от выбора последовательности T_n и от выбора точек $P_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i . \qquad (2.1)$$

Множество G называется областью интегрирования, $f(x,y,z)$ - подынтегральной функцией, x, y, z - переменными интегрирования.

Определение. Функция $f(x,y,z)$, для которой существует конечный предел (2.1), называется интегрируемой на области G.

Теорема (о существовании тройного интеграла). Непрерывная на замкнутой ограниченной трехмерной области G функция интегрируема на этой области.

2.2. Свойства тройного интеграла

1. Линейность.

Если $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ - интегрируемые функции на замкнутой ограниченной области G, то

$$\iiint_G [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_G g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz ,$$

а для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\iiint_G \alpha f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

2. Аддитивность.

Если $f(x,y,z)$ - интегрируемая функция на замкнутой ограниченной области G и G представима в виде объединения конечного числа замкнутых областей $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, таких, что никакие две из них не имеют общих внутренних точек, то

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n} \iiint_{G_i} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz . \qquad (2.2)$$

3. Теорема об оценке тройного интеграла.

Пусть m и M - наименьшее и наибольшее значения функции, интегрируемой в области G, а V - объем этой области. Тогда имеют место неравенства

$$mV \le \iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \le MV.$$

4. Теорема о среднем для тройного интеграла.

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замкнутой ограниченной области G, имеющей объем V, то в области G найдется такая точка P, что

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(P)V.$$

2.3. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

Первый способ (проектирование области на координатную плоскость).

Определение. Трехмерная область G называется правильной по оси OZ, если каждая прямая, параллельная оси OZ ($x, y = \mathrm{const}$), пересекает ее границу не более чем в двух точках: верхней $P_2(x, y, z_2(x,y))$ и нижней $P_1(x,y,z_1(x,y))$, и координаты точек G удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), \\ (x,y) \in D, \end{cases}$$

где D – область на плоскости XOY, на которую проектируется область G.

Множество всех верхних точек P_2 образует верхнюю границу G, множество всех нижних точек P_1 – ее нижнюю границу (рис. 2.1).

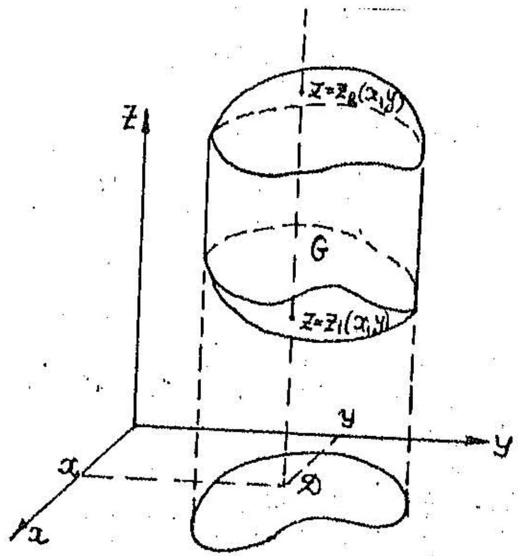

Рис. 2.1

Тогда тройной интеграл по G сводится к повторному:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \Big[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dx\,dy. \quad (2.3)$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл, в котором x и y являются параметрами, затем полученную в результате функцию двух переменных x и y интегрируют по двумерной области D методами, описанными в гл. 1.

Если область G не является правильной по оси OZ, но ее можно представить в виде объединения конечного числа правильных областей $G_1, \ldots, G_n$, каждые две из которых пересекаются либо по пустому множеству, либо по общей границе, то нужно вычислить интеграл по каждой области с помощью повторного интеграла (2.3), а затем воспользоваться свойством аддитивности тройного интеграла (2.2).

Второй способ (проектирование области на координатную прямую).

Пусть отрезок $[\alpha, \beta]$ есть проекция трехмерной области G на ось OX и пусть для каждого $x_0 \in [\alpha,\beta]$ $D_{x_0} = G \cap \{x = x_0\}$ – двумерная область на плоскости $\{x = x_0\}$ (рис. 2.2).

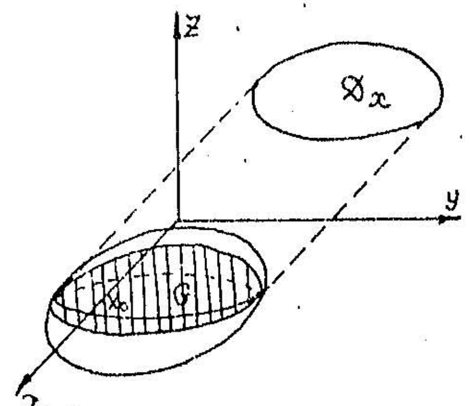

Рис. 2.2

Тогда тройной интеграл по области G сводится к повторному:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_\alpha^\beta \Big[\iint\limits_{D_x} f(x,y,z)\,dy\,dz\Big]dx = \quad (2.4)$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta dx \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)\,dy\,dz.$$

Пример 2.1. Расставить пределы в тройном интеграле

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz$$

по области G, ограниченной поверхностями $z=0$, $x^2+z=4$, $y=1$, $x+y=6$, и вычислить интеграл.

Решение. Область G является правильной по оси OY. Проекция G на плоскость XOZ есть область $D\subset XOZ$, ограниченная линиями (рис. 2.3) $z=0$, $x^2+z=4$.

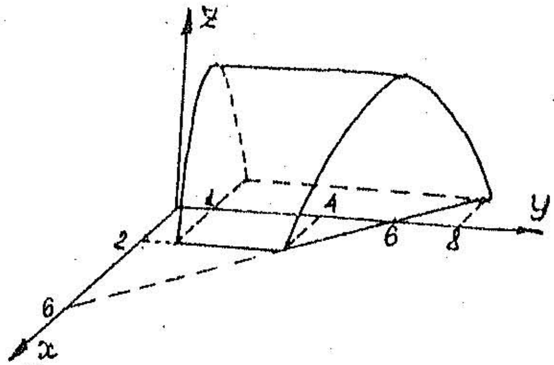

Рис. 2.3

Плоскости $y=1$ и $x+y=6$ пересекаются по прямой, которая проектируется на плоскость XOZ в прямую $x=5$, расположенную вне области D, поэтому координаты точек области D удовлетворяют неравенствам

$$1\leq y\leq 6-x\ ,\quad (x,z)\in D.$$

Следовательно, в соответствии с (2.4), тройной интеграл можно свести к повторному первым способом:

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dz\int_1^{6-x} z\,dy.$$

Так как плоская область D является правильной по оси OZ, двойной интеграл по области D также сводим к повторному, проектируя D на ось OX. Получаем

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2}dx\int_0^{4-x^2}dz\int_1^{6-x}z\,dy = \int_{-2}^{2}dx\int_0^{4-x^2}z(6-x)\,dz =$$

$$=\int_{-2}^{2}(6-x)\,dx\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{4-x^2} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2(6-x)\,dx =$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(48-8x-24x^2+4x^3+3x^4-\frac{x^5}{2}\right)dx =$$

$$=\left(48x-4x^2-8x^3+x^4+\frac{3}{5}x^5-\frac{x^6}{12}\right)\Big|_{x=-2}^{x=2} = \frac{512}{5}.$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz$, где G задано неравенствами $z\geq 0$, $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

Решение. Интеграл по области G (представляющей собой полушар радиуса 1) вычислим вторым способом, проектируя G на ось OZ и рассматривая сечение D_z области G плоскостью $z=\mathrm{const}$.

Проекция G на ось OZ есть отрезок $[0,1]$, а сечение области G плоскостью $z=\mathrm{const}$ есть круг $x^2+y^2\leq 1-z^2$ (радиуса $r=\sqrt{1-z^2}$). Поэтому

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} z\,dx\,dy =$$

$$=\pi\int_0^1 z(1-z^2)\,dz = \pi\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.4. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции $x=x(u;v;w)$, $y=y(u;v;w)$, $z=z(u;v;w)$ взаимно однозначно отображают область G' (в координатах u, v, w) в область G (в координатах x, y, z), причем эти функции являются непрерывно дифференцируемыми в области G', а якобиан I этого отображения не обращается в нуль, за исключением, может быть, конечного числа линий и поверхностей, т.е.

$$I=I(u;v;w)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iiint\limits_{G'} f(x(u;v;w);\,y(u;v;w);\,z(u;v;w))\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

<u>Геометрический смысл якобиана.</u> Если якобиан отображения в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ отличен от нуля, то он равен отношению объемов образа прямоугольного параллелепипеда с бесконечно малыми сторонами, содержащего точку P_0, к объему самого параллелепипеда. Другими словами, якобиан равен коэффициенту изменения объема бесконечно малого тела.

Наиболее часто при вычислении тройных интегралов используют цилиндрические и сферические координаты.

В цилиндрической системе координат положение точки P определяется тремя числами: ρ, φ и z, где ρ и φ - полярные координаты ортогональной проекции точки P на плоскость XOY, а z имеет тот же смысл, что и в декартовой системе координат (рис. 2.4), т.е.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$$

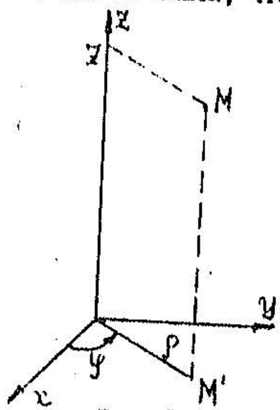

Рис. 2.4

Якобиан этого отображения $I=\rho$. Отметим, что $x^2+y^2=\rho^2$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, $\rho\in[0,+\infty)$; $\varphi\in[\varphi_0;\varphi_0+2\pi]$; $z\in\mathbb{R}$.

В сферической системе координат положение точки P определяется тремя числами: r, θ и φ, где $r=|OP|$ - длина радиус-вектора точки P; θ - угол между плоскостью XOY и радиус-вектором OP; φ - угол между осью OX и ортогональной проекцией радиус-вектора OP на плоскость XOY (рис. 2.5), т.е.

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\cos\theta, \\ z=r\sin\theta. \end{cases}$$

Якобиан этого отображения $I=r^2\cos\theta$.

Отметим, что $r^2=x^2+y^2+z^2$; $\operatorname{tg}\varphi=y/x$;

$\operatorname{tg}\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $x^2+y^2=r^2\cos^2\theta$;

$r\in[0;+\infty)$; $\varphi\in[\varphi_0,\varphi_0+2\pi]$;

$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $r^2=\rho^2+z^2$.

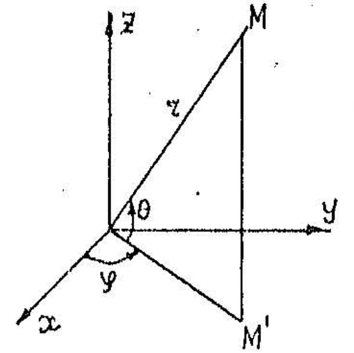

Рис. 2.5

<u>Пример 2.3.</u> Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \frac{z}{x}\,dx\,dy\,dz$ по области G, ограниченной поверхностями $(x-1)^2+y^2=1$; $z=x^2+y^2$; $z=0$ (рис. 2.6).

<u>Решение.</u> Область интегрирования показывает, что удобно перейти к цилиндрическим координатам. Выразим в них уравнения данных поверхностей:

$$(x-1)^2+y^2=1 \iff x^2-2x+1+y^2=1 \iff$$

$$\iff x^2+y^2=2x \iff$$

$$\iff \rho^2=2\rho\cos\rho \iff \rho=2\cos\varphi;$$

$$z=x^2+y^2 \iff z=\rho^2,$$

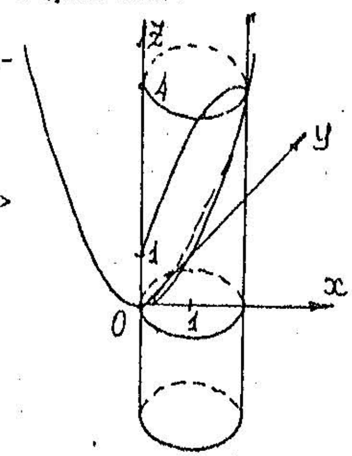

Рис. 2.6

а также подынтегральную функцию

$$\frac{z}{x}=\frac{z}{\rho\cos\varphi}.$$

Якобиан $I=\rho$. Данная область проектируется на плоскость XOY в круг радиуса $R=1$ с центром в точке (1;0).

Теперь вычислим исходный интеграл:

$$\iiint\limits_G \frac{z}{x}\,dx\,dy\,dz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int_0^{\rho^2}\frac{z}{\rho\cos\varphi}\,dz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\int_0^{2\cos\varphi}d\rho\int_0^{\rho^2}z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\,d\rho=0{,}1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}32\cos^4\varphi\,d\varphi=0{,}8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos2\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$= 0{,}8 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + 0{,}5 + 0{,}5\cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 0{,}8\left(1{,}5\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1{,}2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}2\pi.$$

<u>Пример 2.4.</u> Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G x^2y^2z\,dxdydz$ по области G, ограниченной поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$; $z = \sqrt{(x^2+y^2)/3}$ $\left(z \geq \sqrt{(x^2+y^2)/3}\right)$ – рис. 2.7.

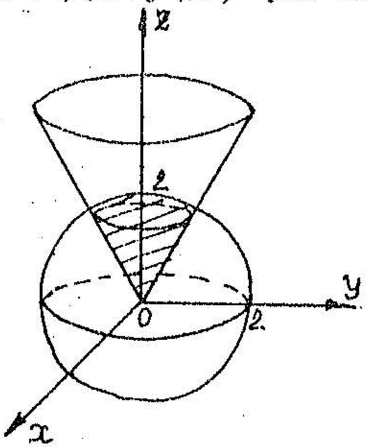

Рис. 2.7

<u>Решение.</u> Область интегрирования показывает, что удобно перейти к сферическим координатам. Выразим в них уравнения данных поверхностей:

$$x^2+y^2+z^2=4 \Leftrightarrow r^2=4 \Leftrightarrow r=2;$$

$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \Leftrightarrow r\sin\theta = \sqrt{\frac{r^2\cos^2\theta}{3}} \Leftrightarrow r\sin\theta =$$

$$= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Якобиан

$$I = r^2\cos\theta.$$

Теперь вычислим исходный интеграл:

$$\iiint\limits_G x^2y^2z\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^2 r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\, r\sin\theta\, r^2\cos^2\theta\,dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\,d\varphi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^5\theta\sin\theta\,d\theta \int\limits_0^2 r^7\,dr =$$

$$= -\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 4\varphi)\,d\varphi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2^8}{8}\cos^5\theta\,d\cos\theta =$$

$$= -4\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 4\varphi)\,\frac{\cos^6\theta}{6}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi = -\frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 4\varphi)\left(0-\frac{27}{64}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{32}\left(4 - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{9}{32}\,2\pi = \frac{9\pi}{16}.$$

<u>Пример 2.5.</u> Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G z\,dxdydz$, где G – тело, ограниченное поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 2.8).

<u>Решение.</u> Перейдем к цилиндрическим координатам. Выразим в них уравнения данных поверхностей:

$$z = x^2+y^2 \Leftrightarrow z = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \rho^2;$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{\rho^2} \Leftrightarrow z = \rho.$$

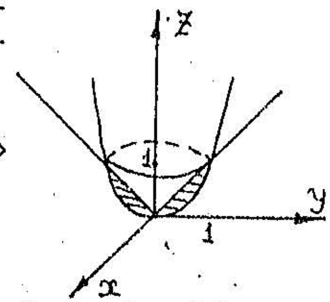

Рис. 2.8

Данное тело проектируется на плоскость XOY в круг радиуса $R = 1$ с центром в начале координат.

Теперь вычислим исходный интеграл:

$$\iiint\limits_G z\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^{\rho} z\,dz = 2\pi\,\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho z^2\Big|_{\rho^2}^{\rho} d\rho =$$

$$=\pi\int_0^1 \rho(\rho^2-\rho^4)d\rho = \pi\int_0^1(\rho^3-\rho^5)d\rho=\pi\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

Этот же интеграл может быть вычислен и в сферических координатах. Уравнения данных поверхностей в сферических координатах примут следующий вид:

$$z=x^2+y^2 \iff r\sin\theta = r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta =$$

$$= r^2\cos^2\theta \iff r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \iff r\sin\theta=\sqrt{r^2\cos^2\theta}=r\cos\theta \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}\theta = 1 \iff \theta=\frac{\pi}{4}.$$

Теперь можно вычислить исходный интеграл:

$$\iiint_G z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r^2\cos\theta\, r\sin\theta\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r^3dr = 2\pi\int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,\frac{\sin^4\theta}{\cos^8\theta}=-\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/4}\frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^7\theta}\,d\cos\theta=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{6\cos^6\theta}-\frac{2}{4\cos^4\theta}+\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}-2+1-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

2.5. Приложения тройного интеграла

1. Объем пространственной области.

Объем пространственной области G вычисляют по формуле

$$V(G)=\iiint_G dx\,dy\,dz.$$

Пример 2.6. Найти объем тела, заданного неравенствами: $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Тело G изображено на рис. 2.9. Для вычисления объема тела перейдем к сферическим координатам. Первое неравенство (определяющее шар радиуса 1) в сферических координатах примет вид $r^2\le$ ≤ 1 или (поскольку $r\ge 0$). Второе неравенство (определяющее внутренность верхней полы конуса) принимает вид

$$r\sin\theta\ge\sqrt{r^2\cos^2\theta}\implies$$

$$\implies r\sin\theta\ge|r\cos\theta|.$$

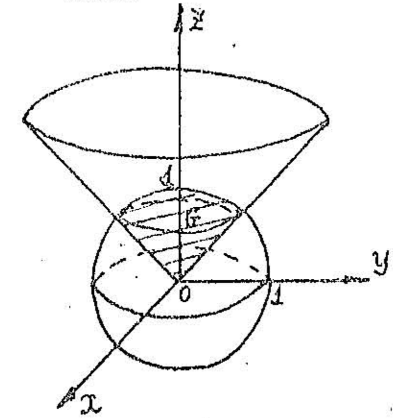

Рис. 2.9

Учитывая, что $r\ge 0$ и $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, имеем $r\cos\theta\ge 0$, следовательно, модуль можно опустить. Итак, $r\sin\theta\ge r\cos\theta \implies \operatorname{tg}\theta\ge 1\implies\theta\ge\pi/4$.

Теперь можно вычислить объем тела:

$$V(G)=\iiint_G dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\int_{\pi/4}^{\pi/2}r^2\cos\theta\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dr=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$$

2. Масса тела (механический смысл тройного интеграла).

Массу тела G с плотностью $\mu(x,y,z)$ вычисляют по формуле

$$M=\iiint_G \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

3. Координаты центра масс $P_0(x_0,y_0,z_0)$ тела G с плотностью $\mu(x,y,z)$.

Эти координаты находят по формулам

$$x_0=\frac{M_{yz}}{M};\qquad y_0=\frac{M_{xz}}{M};\qquad z_0=\frac{M_{xy}}{M},$$

где

$$M_{yz}=\iiint\limits_G x\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

– статический момент относительно плоскости OYZ;

$$M_{xz}=\iiint\limits_G y\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

– статический момент относительно плоскости OXZ;

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

– статический момент относительно плоскости OXY.

Пример 2.7. Найти массу и координаты центра масс тела, лежащего в первом октанте и ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$. Плотность $\mu(x,y,z)=1$.

Решение. Тело G изображено на рис. 2.10. Для нахождения массы и координат центра масс тела удобно перейти к цилиндрическим координатам: уравнение параболоида запишем в виде $z=r^2$, уравнение плоскости $z=1$.

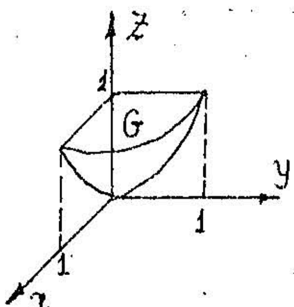

Рис. 2.10

Найдем массу тела:

$$M=\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_0^1 z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1(1-r^2)r\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\varphi=\frac{\pi}{16}.$$

Статические моменты:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_r^1 z^2\,dz=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1(1-r^3)r\,dr=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)d\varphi=\frac{\pi}{20};$$

$$M_{xz}=\iiint\limits_G zy\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_r^1 zr\sin\varphi\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi\times$$

$$\times\int_0^1 r^2(1-r^2)\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\sin\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{15}.$$

Так как тело симметрично относительно плоскости $x=y$, очевидно, что $M_{yz}=M_{xz}$.

Теперь найдем координаты центра масс:

$$x_0=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{16}{15\pi};$$

$$y_0=x_0=\frac{16}{15\pi};$$

$$z_0=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

Итак, координаты центра масс тела $P_0\left(\frac{16}{15\pi},\frac{16}{15\pi},\frac{4}{5}\right)$.

4. Моменты инерции.

Пусть дано тело G с плотностью $\mu(x,y,z)$. Моменты инерции тела G относительно осей координат:

$$I_x=\iiint\limits_G(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(относительно оси OX);

$$I_y=\iiint\limits_G(x^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(относительно оси OY);

$$I_z=\iiint\limits_G(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(относительно оси OZ).

Момент инерции тела G относительно начала координат

$$I_{0}=\iiint\limits_G(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\frac{I_x+I_y+I_z}{2}.$$

Пример 2.8. Найти моменты инерции относительно начала координат и координатных осей полушара $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, с постоянной плотностью μ.

Решение. Тело G изображено на рис. 2.11. Момент инерции относительно начала координат

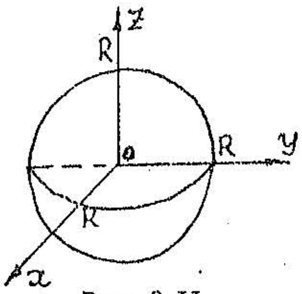

Рис. 2.II

$$I_0=\iiint_G (x^2+y^2+z^2)\mu\,dx\,dy\,dz.$$

Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} y=r\cos\varphi\cos\theta,\\ z=r\sin\varphi\cos\theta,\\ x=r\sin\theta.\end{cases}$$

Тогда

$$I_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R \mu r^2 r^2\cos\theta\,dr=\frac{\mu R^5}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=\frac{2}{5}\pi\mu R^5.$$

Момент инерции относительно оси OX

$$I_x=\iiint_G (y^2+z^2)\mu\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R r^2\cos^2\theta\,\mu r^2\cos\theta\,dr=$$

$$=\frac{\mu R^5}{5}\,2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{4}{15}\pi\mu R^5.$$

Момент инерции относительно оси OY

$$I_y=\iiint_G (x^2+y^2)\mu\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R r^2(\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta)\mu r^2\cos\theta\,dr=$$

$$=\frac{\mu R^5}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\mu R^5}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\varphi)\,d\sin\theta=$$

$$=\frac{\mu R^5}{5}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi+\frac{1}{3}\cos^2\varphi)\,d\varphi=\frac{\mu R^5}{5}\int_0^{2\pi}(1-\frac{2}{3}\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\mu R^5}{5}\int_0^{2\pi}(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{15}\pi\mu R^5.$$

В силу симметрии момент инерции относительно оси OZ равен моменту инерции относительно оси OY : $I_z=I_y$.

Получаем

$$I_0=\frac{2}{5}\pi\mu R^5,\quad I_x=I_y=I_z=\frac{4}{15}\pi\mu R^5.$$

ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ "КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ"

ЗАДАЧА 1. Преобразовать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ в двукратный и расставить пределы по заданной области интегрирования D. Изменить порядок интегрирования. Перейти к полярным координатам (условие см. в табл. 1).

ЗАДАЧА 2. Изменить порядок интегрирования, изобразив на чертеже область интегрирования (табл. 2).

ЗАДАЧА 3. Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями, с помощью двойного интеграла (табл. 3).

ЗАДАЧА 4. Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями, с помощью тройного интеграла (табл. 4).

ЗАДАЧА 5. Вычислить площадь части поверхности S, которая вырезается поверхностями σ (табл. 5).

ЗАДАЧА 6. Найти массу тела, заданного в пространстве неравенствами и имеющего плотность μ (табл. 6).

ЗАДАЧА 7. Найти координаты центра масс (варианты 1-10, 21-30) или моменты инерции (варианты 11-20) тела, имеющего плотность μ (табл. 7).

Таблица 1 (к задаче 1)

Номер варианта	Неравенства, задающие область D
1	$x^2+(y-2)^2\geq 4,\ (x-2)^2+y^2\leq 4$
2	$y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 16,\ (x-2)^2+y^2\geq 4$
3	$x^2+(y-2)^2\leq 4,\ y\leq\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$
4	$\{y\geq 0,\ (x-2)^2+y^2\leq 4\}\cup\{y\leq 0,\ y\leq x,\ x^2+y^2\leq 16\}$
5	$\{x^2+(y-2)^2\leq 4\}\cup\{(x-2)^2+y^2\leq 4\}$
6	$\{x^2+(y-2)^2\leq 4\}\cup\{x^2+y^2\leq 8\}$
7	$2x-2\leq y\leq 2x+2,\ x\leq y\leq x+2$
8	$x^2+y^2\leq 2,\ y\leq x^2,\ x\geq 0$
9	$\{y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 16\}\cup\{y\leq 0,\ (x-2)^2+y^2\leq 4\}$
10	$y^2\leq 4x,\ y\leq 3-x,\ y\geq 0$
11	$x^2-y^2\leq 4,\ y\geq -1-\frac{x}{2},\ y\leq 0$
12	$(x-2)^2+y^2\leq 4,\ y\geq\sqrt{3}(2-x)$
13	$x^2+y^2\leq 4,\ x+y\leq 2,\ y\leq 1$
14	$(x-2)^2+y^2\leq 4,\ (x-1)^2+y^2\geq 1$
15	$\{y\geq 0,\ x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 8,\ x^2+(y-2)^2\geq 4\}\cup\{y\leq 0,\ x^2+y^2\leq 8\}$

Номер варианта	Неравенства, задающие область D
16	$y \geqslant \frac{x}{2} - 2,\quad y \leqslant 4 - x,\quad y \leqslant x$
17	$\frac{1}{2}(x+2) \leqslant y \leqslant \frac{4}{3}(x+2),\quad xy \leqslant 4$
18	$-1 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2-y^2}$
19	$\{x \leqslant -2,\ (x+2)^2 + y^2 \leqslant 4\} \cup \{x \geqslant -2,\ x^2 + y^2 \leqslant 8\}$
20	$x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4,\quad y \geqslant x^2$
21	$(x-2)^2 + y^2 \leqslant 4,\quad 4x^2 \leqslant 4 + 3y^2$
22	$y \geqslant 0,\quad x^2 + y^2 \leqslant 8,\quad (x-2)^2 + y^2 \geqslant 4$
23	$(x-2)^2 + y^2 \leqslant 4,\quad -x \leqslant y \leqslant -x+4,\quad y \geqslant \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$
24	$x^2 + y^2 \leqslant 4,\quad (x-2)^2 + y^2 \leqslant 4$
25	$xy \leqslant 4,\quad \frac{3}{4}x - 2 \leqslant y \leqslant 2x - 2$
26	$x - 4 \leqslant y < -x + 4,\quad x \geqslant 0,\quad y \geqslant -\frac{1}{2}x^2$
27	$x^2 + y^2 \leqslant 9,\quad (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1$
28	$x^2 + y^2 \geqslant 4,\quad (x-2)^2 + y^2 \leqslant 4$
29	$\{x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 4\} \cup \{x \geqslant 0,\ x^2 + (y+1)^2 \leqslant 1\}$
30	$x^2 + y^2 \leqslant 9,\quad x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1,\quad y \geqslant 0$

Таблица 2 (к задаче 2)

Номер варианта	Интеграл	Номер варианта	Интеграл
1	$\int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^{2/x} f(x,y)\,dy$	2	$\int_0^3 dx \int_{-\sqrt{2x/3}}^{\sqrt{2x/3}} f(x,y)\,dy + \int_3^6 dx \int_{\frac{2}{3}(x-3)}^{\sqrt{2x/3}} f(x,y)\,dy$
3	$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx$	4	$\int_{-4/3}^{0} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{2x+1} f(x,y)\,dy + \int_0^{4/3} dx \int_{2x+1}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy$
5	$\int_2^4 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx$	6	$\int_0^3 dx \int_{x^2}^{3+2x} f(x,y)\,dy$
7	$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx$	8	$\int_1^2 dx \int_{2/x}^{2x} f(x,y)\,dy$
9	$\int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} dy \int_{y^2}^{\frac{1}{4}y^2+1} f(x,y)\,dx$	10	$\int_0^1 dx \int_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$
11	$\int_0^{3/4} dx \int_{-2x}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_{3/4}^{3} dx \int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} f(x,y)\,dy$	12	$\int_0^1 dy \int_{2y-3}^{2y} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{2y-3}^{2/y} f(x,y)\,dx$
13	$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx$	14	$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-y^2/2}^{1-y^2} f(x,y)\,dx$
15	$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)\,dx$	16	$\int_0^4 dx \int_{2-\sqrt{8-(x-2)^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy$
17	$\int_0^{2-\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{2-x} f(x,y)\,dy$	18	$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy$
19	$\int_{-2}^{1} dx \int_{-x}^{\frac{1}{2}x+3} f(x,y)\,dy + \int_1^4 dx \times \int_{2x-3}^{\frac{1}{2}x+3} f(x,y)\,dy$	20	$\int_0^1 dx \int_{2x-1}^{(x+1)/2} f(x,y)\,dy$.

Номер варианта	Интеграл
21	$\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{-x-2}^{\sqrt{-x}}f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,dy$
22	$\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-2+\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,dy$
23	$\int\limits_{0}^{8/3}dx\int\limits_{2x-2}^{\sqrt{4+x^2}}f(x,y)\,dy$
24	$\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2y-1}^{(y+1)/2}f(x,y)\,dy$
25	$\int\limits_{-4}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{-x}}^{2-x}f(x,y)\,dy$
26	$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}f(x,y)\,dy$
27	$\int\limits_{-3}^{0}dx\int\limits_{0}^{3+x}f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{2x}^{3+x}f(x,y)\,dy$
28	$\int\limits_{-3}^{0}dx\int\limits_{x-2}^{4+3x}f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{-2}^{4-2x}f(x,y)\,dy$
29	$\int\limits_{-6}^{0}dx\int\limits_{0}^{2x+12}f(x,y)\,dy+\int\limits_{0}^{6}dx\int\limits_{2x}^{2x+12}f(x,y)\,dy$
30	$\int\limits_{0}^{3}dy\int\limits_{y-3}^{0}f(x,y)\,dx+\int\limits_{3}^{6}dy\int\limits_{0}^{y-3}f(x,y)\,dx$

Таблица 3 (к задаче 3)

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G
1	$z^2=9x,\quad x=y,\quad x+y=2$
2	$z=x^2-4y^2,\quad z=0,\quad x=4$
3	$z^2=4x,\quad x+y=2,\quad y=0$
4	$x^2=4y,\quad y+z=4,\quad y+2z=4$
5	$z=x^2+y^2,\quad y=x^2,\quad y=1,\quad z=0$
6	$z=x,\quad z=4-y^2,\quad x=0$
7	$z=1-x^2,\quad z=1-y^2,\quad z=0$
8	$z=4xy,\quad z=0,\quad y\geqslant 2,\quad x+y=4$
9	$z^2=y,\quad z^2=4-y,\quad x=0,\quad x+y=4$
10	$z=4-x^2,\quad y=0,\quad z=y$
11	$z^2=4y,\quad x=y,\quad x+y=2$
12	$y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=4,\quad 2x+z=4$
13	$y=x^2,\quad z=y,\quad z=2-y$
14	$z=x^2+y^2,\quad z=0,\quad y=2,\quad y=2x,\quad y=6-x$
15	$z=-x^2+2,\quad z=0,\quad y=x,\quad y=2x,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0$

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G
16	$z=y^2,\ z=4,\ y=3-x,\ x=0$
17	$x=\sqrt{y},\ y=\sqrt{x},\ z+x=3,\ z=0$
18	$z=x^2+y^2,\ y=x,\ y=2x,\ x=1,\ z=0$
19	$z^2+2y^2=8,\ y=x-2,\ y=-x-2$
20	$z=\dfrac{2}{y},\ x+y+z=3,\ -2x+y+z=3$
21	$z=4-y^2,\ z=0,\ y=2-x^2$
22	$y=4-z^2,\ x+y=4,\ x=0,\ y=0$
23	$y=4-z^2,\ x=y,\ x=0$
24	$y=0,\ y=4-z,\ 4z=x^2$
25	$y+z=2,\ z=0,\ 4z+2y+x=8,\ 2z+y+x=4$
26	$y+z=2,\ y=0,\ z=2x^2,\ z=4x^2-2$
27	$y^2=x+4,\ y^2=2(x+2),\ z=0,\ z=-x$
28	$z=3-y,\ z=0,\ x=\sqrt{y},\ x=2\sqrt{y}$
29	$z^2=4-x,\ y^2=4-x,\ x=0$
30	$x^2+(y+1)^2=1,\ z=0,\ x-y+z=4$

Таблица 4 (к задаче 4)

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G
1	$x^2+y^2+z^2=5,\ z\geqslant x^2+y^2+1$
2	$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=5-x$
3	$z=x^2+y^2,\ z=2x$
4	$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x+y+z=4,\ z=0$
5	$x^2+y^2+z^2=9,\ z\geqslant 1$
6	$(x-1)^2+y^2=1,\ z=0,\ x+y+z=4$
7	$x^2+y^2+z^2=25,\ 3\leqslant z\leqslant 4$
8	$z=8-y^2,\ z=0,\ x^2+y^2=4$
9	$z=9-x^2-y^2,\ z=0,\ x^2+y^2\geqslant 4$
10	$x^2+y^2-z^2=4,\ x^2+y^2=9$
11	$x^2+y^2+z^2=6,\ z\geqslant x^2+y^2$
12	$z=x^2,\ z=0,\ x^2+y^2=1$
13	$z=6-x,\ z=0,\ x^2+(y-2)^2=4,\ x^2+(y-1)^2=1$
14	$z^2=x^2+y^2,\ 2z^2=x^2+y^2+1$
15	$z=\sqrt{x^2+y^2+1},\ z=\sqrt{3-x^2-y^2}$

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G
16	$x^2+y^2 \geq 1, \quad x^2+y^2+z^2=4$
17	$z=x^2+y^2, \quad z=2(x^2+y^2), \quad (x-1)^2+y^2=1$
18	$z=10-x^2, \quad z=0, \quad x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=4$
19	$z=4-x^2-y^2, \quad z=0, \quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y=\sqrt{3}x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$
20	$z=x^2+y^2, \quad z=4$
21	$z=4-x^2-y^2, \quad z=3$
22	$z=6, \quad z=10-x^2-y^2$
23	$z=5-x^2-y^2, \quad z=1$
24	$z=x^2+y^2, \quad 1 \leq z \leq 4$
25	$z=x^2+y^2, \quad z=0, \quad (x-1)^2+y^2=1$
26	$z=5-x^2-y^2, \quad z=0, \quad (y-1)^2+x^2 \leq 1$
27	$y=-x, \quad y=x, \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad z=0, \quad z=x$
28	$x^2+y^2-z^2=1, \quad x^2+y^2=2z^2$
29	$z=x^2+y^2, \quad z=4, \quad y \geq 1$
30	$z=x^2+y^2+1, \quad z=0, \quad x^2+y^2=4$

Таблица 5 (к задаче 5)

Номер варианта	Поверхность S	Поверхности σ
1	$x+y+z=6$	$y^2=x, \quad y^2=4-x$
2	$x^2+z^2=4$	$2x-1 \leq y \leq 2x+1$
3	$z^2=x^2+y^2$	$x+y=4, \quad x=4, \quad y=4$
4	$z^2+(y-2)^2=1$	$x=\pm\sqrt{2}(y-1)$
5	$x^2+y^2=z^2$	$z^2=2y$
6	$y^2+z^2=x^2$	$1 \leq x \leq 4$
7	$x=\sqrt{z}$	$z=1, \quad z=0, \quad 4x^2-y^2=4$
8	$z=2(1-x^2)$	$z=0, \quad y^2-16x^2=1$
9	$y^2+z^2=x^2$	$y=x-2, \quad y=x-4, \quad y=2-x, \quad y=4-x$
10	$z=4-(x-1)^2$	$z=0, \quad y=x-1, \quad y=1-x, \quad x=3$
11	$x^2=2z$	$y=x, \quad y=-x, \quad x=\sqrt{3}$
12	$z=9-y^2$	$z=0, \quad x^2-4y^2=1$
13	$x^2+z^2=1$	$x^2+2y^2-z^2 \leq 1$
14	$x^2+y^2+z^2=1$	$0 \leq \frac{\sqrt{3}}{3}y \leq z \leq y$
15	$z=x^2+y^2$	$4 \leq z \leq 9$

Окончание табл. 5

Номер варианта	Поверхность S	Поверхности σ
16	$x^2+y^2=1$	$2x^2+y^2-z^2\le 1$
17	$z=x^2-y^2$	$z=3x^2+y^2-2,\ z=3x^2+y^2-4$
18	$z=2y$	$z=x^2+y^2$
19	$(x-1)^2+z^2=1$	$x^2+y^2+z^2\le 4$
20	$x+y+z=5$	$y=x^2,\quad y=4-x^2$
21	$x^2+z^2=9$	$x-4\le y\le x$
22	$y^2+x^2=z^2$	$y=\dfrac{x}{2},\ x=1,\ x=5,\ y=-\dfrac{x}{2}$
23	$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{6}=1$	$x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=3,\ xy=1$
24	$x^2=y^2+z^2$	$y=2x^2$
25	$y=z^2$	$y=x^2,\ y=3$
26	$x^2+y^2=4z^2$	$y=0,\ x=2,\ y=2x$
27	$z=x^2+y^2$	$2x=z^2$
28	$z^2=4x$	$y^2=4x,\ x=3$
29	$z^2=x^2+y^2$	$x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y=a$
30	$x^2+y^2=z^2$	$y^2=ax,\ x=a$

Таблица 6 (к задаче 6)

Номер варианта	Неравенства, определяющие тело G	Плотность μ
1	$x^2+y^2+z^2\le 36$; $\sqrt{x^2+y^2}\le z$; $y\ge 0$	$\sqrt{x^2+y^2}$
2	$x^2+y^2\le 2y$; $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{36-x^2-y^2}$	$z/2$
3	$x^2+y^2\le 3z$; $x^2+y^2+z^2\le 18$; $x\ge 0$	$\dfrac{x^2+y^2}{3}$
4	$x^2+y^2\le 2z$; $x^2+y^2+z^2\le 8$; $y\ge 0$	x^2+y^2
5	$x^2+y^2\le 4y$; $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{36-x^2-y^2}$	z
6	$x^2+y^2+z^2\le 9$; $x\ge 0$; $y\ge 0$; $z\ge 0$	z
7	$y^2+z^2\ge 16$; $x^2+y^2+z^2\le 25$; $z\ge 0$	$\sqrt{y^2+z^2}$
8	$1\le x^2+y^2+z^2\le 4$; $0\le z\le\sqrt{3(x^2+y^2)}$	$\lvert x\rvert$
9	$x^2+y^2\le z\le 8-x^2-y^2$	z
10	$x^2+y^2\le 25$; $x^2+y^2+z^2\le 36$	$\sqrt{x^2+y^2}$
11	$x^2+y^2-z^2\le 0$; $0\le z\le 3$	z
12	$x^2+y^2+z^2\le 9$; $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{3(x^2+y^2)}$; $x\ge 0$	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
13	$z\ge x^2+3$; $z\le 11-x^2-2y^2$; $y\le 0$	1
14	$2x+z\ge 2$; $x+z\le 2$; $0\le y\le\sqrt{2x}$	y
15	$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 6-x^2-y^2$; $-x\le y\le x$	x

Номер варианта	Неравенства, определяющие тело G	Плотность μ
16	$\sqrt{x^2+y^2} \leq z$; $x^2+y^2+z^2 \leq 4x$	$\frac{z}{3}$
17	$\sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$; $y \geq 0$	y
18	$9 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 36$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
19	$x^2+y^2+z^2 \leq 4$; $x^2+y^2+z^2 \leq 4z$	z^2
20	$z \geq y^2+3$; $z \leq 11-2x^2-y^2$; $x \geq 0$	1
21	$x^2+y^2+z^2 \leq 36$; $y^2+z^2 \leq 9$	$\|x\|$
22	$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-x^2-y^2$; $\|y\| \leq \|x\|$	$\|x\|$
23	$x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$; $x \geq 0$	z
24	$\sqrt{x^2+y^2} \leq z$; $x^2+y^2+z^2 \leq 4x$	z
25	$0 \leq y \leq \sqrt{8x-x^2}$; $0 \leq z \leq 3$	$z\sqrt{x^2+y^2}$
26	$x^2+y^2+z^2 \leq 16$; $x^2+y^2+z^2 \leq 8x$	$x^2/4$
27	$x^2+z^2 \leq 9$; $x^2+y^2+z^2 \leq 25$; $x \geq 0$	$\sqrt{x^2+z^2}$
28	$4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$; $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$	$\|y\|$
29	$0 \leq x \leq \sqrt{4y-y^2}$; $0 \leq z \leq 2$	$z\sqrt{x^2+y^2}$
30	$x^2+y^2 \geq 9$; $x^2+y^2+z^2 \leq 25$; $z \geq 0$	$\sqrt{x^2+y^2}$

Таблица 7 (к задаче 7)

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G (или неравенства, определяющие тело)	Плотность μ	Требуется найти
1	$x^2+z^2\ 4;\ y=1;\ y=3;\ z=0\ (z\geqslant 0)$	1	Координаты центра масс
2	$z=4-x^2-y^2;\ z=1;\ x=0;\ y=0\ \left(\begin{matrix} x\geqslant 0; \\ y\geqslant 0 \end{matrix}\right)$	1	То же
3	$2z=x^2+4x+y^2-2y+5;\ z=2$	$(x+2)^2+(y-1)^2$	"
4	$y^2=4-x^2-z^2;\ y=1;\ x=0;\ z=0\ (x\geqslant 0;\ z\geqslant 0)$	1	"
5	$z^2\geqslant x^2+y^2;\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2\ (x\geqslant 0;\ y\leqslant 0;\ z\geqslant 0)$	1	"
6	$z^2\geqslant x^2+y^2;\ x^2+y^2+z^2\leqslant 8\ (x\leqslant 0;\ y\geqslant 0;\ z\geqslant 0)$	z	"
7	$2z=x^2-4x+y^2+2y+5;\ z=2$	z^2	"
8	$x^2+z^2=9;\ y=1;\ y=3;\ z=0\ (z\geqslant 0)$	1	"

Продолжение табл. 7

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G (или неравенства, определяющие тело)	Плотность μ	Требуется найти
9	$x^2=4z$; $y^2=4x$; $x=1$; $z=0$	1	Координаты центра масс
10	$z=4-x^2-y^2$; $z=1$; $x=0$; $y=0$ $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0)$	1	То же
11	$x^2+y^2\leqslant 4$; $y^2+z^2+x^2\leqslant 8$; $z\geqslant 0$	$2z$	Момент инерции относительно оси OX
12	$z=4-x^2-y^2$; $z=1$; $x=0$; $y=0$ $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0)$	1	То же относительно оси OY
13	$x^2+y^2+z^2=4$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$	1	То же относительно оси OZ
14	$x^2+y^2+z^2=1$; $z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$	1	То же относительно оси OZ
15	$x^2+y^2+z^2=4$; $y=1$ $(y\geqslant 1)$	1	Момент инерции относительно начала координат
16	$x^2+y^2+z^2=2$; $x=-1$ $(x\leqslant -1)$	1	То же

Продолжение табл. 7

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G (или неравенства, определяющие тело G)	Плотность μ	Требуется найти
17	$x^2+y^2\geqslant 1$; $x^2+y^2\leqslant 4$; $z=0$; $z=2$	1	Момент инерции относительно оси OX
18	$z=4-x^2-y^2$; $z=1$; $x=0$; $y=0$ $(x\geqslant 0;\ y\leqslant 0)$	1	То же относительно оси OY
19	$z=8-x^2-y^2$; $x^2+y^2\geqslant 4$; $z=0$ $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ z\geqslant 0)$	1	То же относительно оси OX
20	$z=4-x^2-y^2$; $z=1$; $x=0$; $y=0$ $(x\leqslant 0;\ y\geqslant 0)$	1	То же относительно оси OY
21	$2z=x^2+y^2$; $z=2$	$2(x^2+y^2)$	Координаты центра масс
22	$x^2+y^2+z^2=2z$	$x^2+y^2+z^2$	То же
23	$x=y^2+z^2$; $x=4$	1	"
24	$z^2=4x$; $y^2=4z$; $z=1$; $x=0$	1	"

Окончание табл. 7

Номер варианта	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело G (или неравенства, определяющие тело G)	Плотность μ	Требуется найти
25	$y^2+z^2=16$; $x=1$; $x=3$; $z=0$ $(z\geq 0)$	1	Координаты центра масс
26	$x^2+y^2+z^2=12$; $z\geq \dfrac{x^2+y^2}{4}$	1	То же
27	$y=\sqrt{x}$; $y=2\sqrt{x}$; $z=0$; $x+z=6$	1	"
28	$z=x^2+y^2$; $z=4$	$z(x^2+y^2)$	"
29	$2z=x^2-4x+y^2+2y+5$; $z=2$	$(x-2)^2+(y+1)^2$	"
30	$z^2+x^2=1$; $y=1$; $y=3$; $z=0$ $(z\geq 0)$	1	"

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редакция заказной литературы

Дмитрий Альфредович Мельников
Алексей Владиславович Филиновский
Василий Юрьевич Чуев

Кратные интегралы

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская
Редактор Е.К.Кошелева
Корректор Л.И.Малютина

Подписано в печать 03.04.97. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 2.
Печ.л. 3,5. Усл.печ.л. 3,26. Уч.-изд.л. 3,12.
Тираж 1000 экз. Изд.№ 59. Заказ 156 С 42

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана,
типография МГТУ им. Н.Э.Баумана.
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.