Цена 20 коп.

Государственный комитет СССР по народному образованию

Г. Д. КАРТАШОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятностные модели

Издательство МГТУ
1990

Государственный комитет СССР по народному образованию

Г.Д.Карташов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятностные модели

Часть I

Утверждено редсоветом МГТУ как учебное пособие
по курсу "Специальные главы высшей математики"

Под редакцией Л.Г.Ветрова

Издательство МГТУ
1990

ББК 22.171
К27

К27 Карташов Г.Д. Теория вероятностей: Вероятностные модели: Учеб.пособие по курсу "Специальные главы высшей математики". Ч.I / Под ред. Л.Г.Ветрова. - М.: Изд-во МГТУ, 1990. - 64 с., ил.

ISBN 5-7038-0511-2

Изложены основы теории вероятностей в дискретном случае. Для самостоятельного изучения студентами технических вузов.
Ил. 6. Табл. 8. Библиогр. 7 назв.

Рецензенты: В.А.Каштанов, Р.С.Судаков

ББК 22.171

ISBN 5-7038-0511-2

ВВЕДЕНИЕ

Чему равна вероятность падения монеты гербом вверх при однократном ее подкидывании? С какой вероятностью выпадает шесть очков при бросании игральной кости? Что более вероятно ожидать летом в Москве - снег или дождь? На эти и подобные вопросы правильно ответят многие. Даже не знакомые с основами известной теории знают, что с вероятностью 1/2 монета ляжет гербом, а с вероятностью 1/6 может выпасть любая грань игральной кости. И, конечно, маловероятно, что летом в Москве напомнит о себе зима.

Еще в период раннего развития молодого человека в его лексикон прочно входят слова "вероятность", "ожидание", "случай" и т.п., точный смысл которых является предметом теории вероятностей. И в этом нет ничего удивительного. Мы живем в случайном мире и должны к нему адаптироваться с самого юного возраста.

Безусловно, Вы знаете, что теория вероятностей - раздел математики, в котором изучаются случайные явления. Но такое определение является неполным. Разве при изучении случайных явлений используется только этот раздел? Конечно, нет! Опыт показывает, что практически весь математический аппарат активно привлекается к описанию случайностей. Естественно, возникает вопрос о роли теории вероятностей в математической науке при исследовании случайностей. Исключительность этой роли состоит в том, что теория вероятностей призвана строить математические модели случайных экспериментов, явлений с целью их количественного описания. Другие математические дисциплины этим не занимаются.

Изучением случайных явлений занимаются и другие естественные науки: физика, химия и др. Какая же роль отводится на фоне этих наук теории вероятностей? Если для естественных наук основной является задача установления глубинных причин случайных явлений, связей между причинами и следствиями, то для теории вероятностей - лишь вопрос о том, насколько вероятно при данных условиях случайного эксперимента появление того или иного исхода. К этому следует добавить, что методы теории вероятностей применимы лишь к ограниченному классу случайных явлений, а именно к таким, у которых появление исходов обусловлено определенной устойчивостью при многократном воспроизведении опыта. Но отсюда не следует делать поспешные выводы о незначительной роли теории вероятностей в изучении случайных явлений. Оказывается, изменяя условия эксперимента, можно с помощью методов теории вероятностей не только описывать и прогнозировать исходы опыта, но и устанавливать зависимости между наблюдаемыми параметрами и внешними факторами, тем самым открывая закономерности случайных явлений, связей между причинами и их следствиями.

В данном пособии рассматриваются лишь начала теории вероятностей: вероятностные модели случайных экспериментов, классические модели и комбинаторные задачи. В приложении содержатся условия домашнего задания по теории вероятностей, подготовленные преподавателями кафедры "Высшая математика" при участии автора.

Темы и задачи семинарских занятий приведены в [7]. В списке литературы указаны источники, которые наиболее активно использовались в работе над пособием.

I. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

I.I. Случайный эксперимент

Теория вероятностей, как и любая другая, имеет свою специфическую терминологию. Прежде чем перейти к основным понятиям и определениям, сделаем одно предостережение. Начинающего изучать теорию вероятностей и привыкшего к строгим математическим формулировкам может обескуражить вначале интуитивный способ введения некоторых понятий. Дело в том, что содержательную сторону понятий и выводов теории вероятностей будем пояснять на практических примерах. Из-за этого связь теории вероятностей с практикой оказывается настолько тесной, что неопытному читателю порой бывает трудно провести границу между ними. Строгое определение ряда основных понятий будет дано в подразделе I.8, посвященном аксиоматическому построению теории вероятностей.

Понятие эксперимента (или, что то же самое, испытания, опыта) является одним из фундаментальных и первичных и поэтому не требует четкого определения. Обычно под ним подразумевают создание некоторого комплекса условий и проведения при этом возможных наблюдений. Будем тоже придерживаться такой точки зрения, считая эксперимент заданным, если указаны: I) условия его проведения; 2) что подлежит наблюдению. Не станем уточнять, какой смысл вкладывается в интуитивные понятия "комплекс условий" и "возможные исходы". Для понимания излагаемого материала достаточно будет привести ряд перечисленных далее примеров.

По характеру связи комплекса условий с наблюдаемыми результатами эксперименты могут быть:

а) детерминированными, когда условия (причины) однозначно определяют их результаты (следствия). Другими словами, при неоднократном воспроизведении эксперимента получают один и тот же исход;

б) случайными, при этом результаты могут быть различными. Подобные эксперименты называют иногда также вероятностными, стохастическими.

Приведем примеры детерминированных экспериментов.

Пример I. Воду при атмосферном давлении в 760 мм охлаждают до $0^{\circ}C$ (комплекс условий). Наблюдают состояние воды, точнее – переход из жидкого состояния в твердое.

Пример 2. К резистору с сопротивлением R прикладывают ток силой I_1 (комплекс условий). Измеряют падение напряжения. Согласно закону Ома, оно равно $U_1 = RI_1$.

Пример 3. К резистору с сопротивлением R прикладывают ток силой I_2 (комплекс условий). Измеряют падение напряжения $U_2 = I_2R^2$.

Пример 4. К резистору с сопротивлением R прикладывают ток силой I_1 (комплекс условий). Измеряют величину выделяемой теплоты. Согласно закону Джоуля – Ленца, она равна $Q_1 = I_1R^2$.

Пример 5. На плоскости строят произвольный треугольник (комплекс условий). Измеряют сумму его углов, которая, как известно, равна 180°.

Дадим пример случайного эксперимента, оставляя в стороне многочисленные примеры, связанные с азартными играми, – картами, подбрасыванием монеты и др.

Пример 6. На контроль готовой продукции поступают партии изделий объемом N (комплекс условий). Наблюдают за числом годных изделий в партии. Это число случайное, так как в процессе производства невозможно обеспечить одинаковые условия при изготовлении изделий.

Пример 7. Число частиц, наблюдаемых при альфа-распаде в единицу времени, является случайным, несмотря на то что наблюдения проводят при одинаковом объеме радиоактивного вещества и одинаковых внешних условиях (комплекс условий).

I.2. Интуитивные представления о случайных событиях

Как видно из приведенных ранее примеров, результаты опыта могут быть самыми разнообразными. В процессе эксперимента можно наблюдать проявление многих физических, химических и других законов, получать значения некоторых величин, быть участником событий и т.д. Для построения математической теории случайных экспериментов условимся называть результаты опыта кратко - событиями и обозначать их латинскими буквами (как правило, заглавными) с индексами или без них.

Рассмотрим некоторый эксперимент, и пусть A, B .... - его события. Конкретное содержание эксперимента и реальная природа его событий не являются существенными. Важно только, чтобы речь шла об одном и том же эксперименте. События по степени влияния на них комплекса условий разделяют на достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие неизбежно наступает при проведении эксперимента, а невозможное событие не происходит вовсе. Принято обозначать их соответственно Ω и $\varnothing$. Случайное событие при реализации комплекса условий может произойти, а может и не произойти. Другими словами, при неоднократном воспроизведении эксперимента случайное событие не всегда может произойти.

Примеры достоверных и случайных событий приведены были в подразделе I.I.

Имеет смысл рассматривать достоверное и невозможное события как случайные, которые всегда наступают (не наступают) соответственно. Это позволяет результаты опыта кратко называть событиями, опуская приставку "случайное".

Введем теперь ряд возможных отношений между двумя событиями A и B.

Говорят, что событие A влечет событие B, и записывают это так: $A \subseteq B$, или $B \supseteq A$, - если при свершении A наступает свершение B. Если же $A \subseteq B$, и, одновременно, $B \subseteq A$, то события A и B считают эквивалентными (равносильными) и пишут $A = B$. Или, кратко, $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. Эквивалентные события одновременно или происходят (в опыте), или не происходят. Обратите внимание на то, что для записи эквивалентных событий используется знак равенства (=). Однако из записи $A = B$ не следует, вообще говоря, что события A и B совпадают между собой (равны). Подтвердим сказанное примерами.

Пример I. Молодые супруги посещают театр всегда вместе. Пусть

A - на спектакле в театре присутствует ОН[I];

B - на спектакле в театре присутствет ОНА.

События A и B эквивалентны, но они различны хотя бы потому, что относятся к каждому из супругов, различающихся по полу, интеллекту, восприятию, состоянию и т.д.

Пример 2. Из множества целых чисел $\{2, 3, \ldots, N\}$ наугад выбирают одно. Пусть им оказалось число n. Введем два события:

A - число n простое,

B - число $(n-1)!+1$ делится без остатка на n.

Эквивалентны или нет события A и B?

Оказывается, что $A = B$. Справедливость этого нетривиального утверждения следует из известной в теории чисел теоремы Вильсона, согласно которой число p является простым тогда и только тогда, когда оно является сомножителем числа $(p-1)!+1$.

(Заметим, что теорема Вильсона позволяет при помощи только одного деления выяснить, является данное число простым или не является.)

Пример 3. Из множества натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$ наугад выбирают три. Пусть ими оказались числа $x < y < z$.

Будем говорить, что наступает событие A, если

$$x^n + y^n = z^n,$$

где n - фиксированное целое число, большее двух.

Известно, что для $n \leqslant 100\,000$ A - невозможное событие. Однако до сих пор не доказана великая теорема Ферма, утверждающая, что $A = \varnothing$ для всех $n \geqslant 3$.

Этот пример показывает, что не всегда легко установить эквивалентность событий.

Каждому событию A ставят в соответствие противоположное событие, которое обозначают $\bar{A}$. По определению противоположное событие $\bar{A}$ наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A. Понятно, что события A и $\bar{A}$ одновременно наступить не могут, но в каждом опыте одно из них обязательно происходит.

Пример 4. Пусть A - падение монеты гербом вверх при ее бросании. Тогда $\bar{A}$ - падение монеты другой стороной.

Пример 5. Проводится контроль готовой продукции по альтерна-

I Запись A - ... означает, что A есть событие, состоящее в том, что ...

тивному признаку. Если A – годное контролируемое изделие, то $\bar{A}$ – дефектное.

Не должны противоречить Вашим интуитивным представлениям следующие соотношения[2]:

$$\bar{\bar{A}} = A,\ \bar{\Omega} = \varnothing,\ \bar{\varnothing} = \Omega,$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \supseteq \bar{B}.$$

Два события называют несовместными, если их одновременное появление невозможно. Примером несовместных событий являются A и $\bar{A}$. Пусть B и C – несовместные события. В отличие от пары $A, \bar{A}$ не обязательно, чтобы в каждом опыте наступило одно из событий B или C.

Понятие несовместности событий легко распространяется на произвольное число событий. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны между собой, если одновременное появление двух и более из них невозможно.

Пример 6. Пусть A_i – событие, когда выпало i очков при бросании игральной кости, $i = \overline{1,6}$. События A_1, A_3, A_4 – несовместны между собой.

I.3. Интуитивные операции над событиями

Введем две важнейшие операции над событиями: сложение и умножение.

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда наступает A или B либо A и B одновременно. Или, короче, сумма двух событий $A+B$ состоит в наступлении хотя бы одного из событий A и B. Из определения следует, что $A \subseteq A+B$ и $B \subseteq A+B$.

Нетрудно проверить справедливость следующих соотношений:

$A+B = B+A$ (коммутативный закон),

$(A+B)+C = A+(B+C)$ (ассоциативный закон),

$A + \varnothing = A$,

$A + \bar{A} = \Omega$.

Отсюда видно, что введенная операция обладает рядом свойств операции сложения. В качестве нуля здесь выступает невозможное событие $\varnothing$. Этим оправдано употребление знака (+) и называние

---

[2] Запись ... $\Rightarrow$ жжж означает, что из утверждения ... следует справедливость утверждения ж ж ж. Что собой представляют утверждения ... и ж ж ж – не имеет значения.

введенной операции сложением. Однако аналогия с алгеброй чисел не является полной, поскольку

$$A + A = A.$$

(Подобные алгебры называют булевыми.)

Операция сложения легко распространяется на произвольное число событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Естественно понимать под суммой $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (или, кратко, $\sum_{i=1}^{n} A_i$) такое событие, которое происходит при наступлении любого события A_i, $i = \overline{1,n}$. В силу ассоциативного закона порядок сложения не важен, а поэтому скобки в сумме $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ не указаны.

Рассмотрим две задачи теории надежности, при решении которых используется операция сложения событий. Для этого введем вначале понятия последовательной и параллельной систем.

Систему, состоящую из n элементов, называют последовательной (в смысле надежности), если она неработоспособна, когда отказывает хотя бы один ее элемент. Можно дать другую эквивалентную формулировку. Систему называют последовательной, если она работоспособна тогда и только тогда, когда работоспособны все ее элементы. По аналогии с электрическими схемами последовательную систему удобно изображать в виде цепи (рис.I), где прямоугольниками обозначены комплектующие элементы.

Рис.I

Систему, состоящую из n элементов, называют параллельной (в смысле надежности), если она неработоспособна лишь при отказе всех ее элементов. Другими словами, если хотя бы один элемент работоспособен, параллельную систему считают неотказавшей (рис.2).

Пример I. Пусть A_i – отказ i-го элемента, $i = \overline{1,n}$, а $A_{пс}$ – отказ последовательной системы. Очевидно, что

$$A_{пс} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i. \quad \text{(I.3.I)}$$

Пример 2. Пусть события $\bar{A}_i$ и $\bar{A}_{пр}$ означают соответственно, что i-й элемент и параллельная система работоспособны. Тогда

Рис.2

$$\bar{A}_{np}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\ldots+\bar{A}_n=\sum_{i=1}^{n}\bar{A}_i . \qquad (1.3.2)$$

Произведением AB двух событий A и B называют такое событие, которое появляется тогда и только тогда, когда наступают события A и B одновременно. Непосредственно из определения вытекают:

$AB=BA$ (коммутативный закон),

$(AB)C=A(BC)$ (ассоциативный закон),

$A\Omega=A$,

$A\varnothing=\varnothing$.

Эти соотношения напоминают правила умножения чисел, где в качестве единицы выступает достоверное событие Ω. Поэтому введенную операцию над событиями называют умножением и обозначают ее знаком (.).

Умножение событий также неполностью повторяет свойства умножения чисел, в частности

$$AA=A.$$

Операцию умножения распространяют на произвольное число событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Под произведением $A_1 \; A_2 \; \ldots \; A_n$ (или, кратко, $\prod_{i=1} A_i$) понимают событие, появляющееся лишь при одновременном наступлении всех событий A_i, $i=\overline{1,n}$.

Пример 3. Пусть события $\bar{A}_i$ и $\bar{A}_{nc}$ означают соответственно, что i-й элемент и последовательная система работоспособны. Очевидно,

$$\bar{A}_{nc}=\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n=\prod_{i=1}^{n}\bar{A}_i . \qquad (1.3.3)$$

Пример 4. Пусть A_i и A_{np} – отказ i-го элемента и параллельной системы, $i=\overline{1,n}$. Тогда

$$A_{np}=A_1A_2\ldots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i . \qquad (1.3.4)$$

С помощью операции умножения удобно записывать ряд отношений между событиями. Например,

$$A\subseteq B \Leftrightarrow AB=A;$$

$$A=B \Leftrightarrow (AB=A)\wedge(AB=B);$$

события A и B несовместны тогда и только тогда, когда $AB=\varnothing$, или в многомерном случае

($A_1, A_2, \ldots, A_n$ – несовместны между собой) $\Leftrightarrow A_iA_j=\varnothing, \forall i\neq j$.

Убедитесь в справедливости утверждений:

$A\bar{A}=\varnothing$,

$A(B+C)=AB+AC$ (распределительный закон),

$\overline{A+B}=\bar{A}\;\bar{B}$.

Наряду со сложением двух событий вводят обратную операцию – вычитание (–). Разностью $A-B$ называют такое событие, которое появляется, когда событие A наступает, а событие B нет. Название операции оправдано тем, что

$$(A-B)+B=A.$$

Решите следующие примеры.

Пример 5. На рис.3 представлена структурная схема надежности системы. Пусть события $\bar{A}$ и $\bar{A}_i$ означают соответственно отказ системы и i-го элемента, $i=\overline{1,4}$. Запишите события A и $\bar{A}$ с помощью введенных операций через A_i, $i=\overline{1,4}$ и, отдельно, через $\bar{A}_i$, $i=1,4$.

Ответы:

$$A=(A_1A_2+A_3)A_4,$$
$$\bar{A}=(\bar{A}_1+\bar{A}_2)\bar{A}_3+\bar{A}_4. \qquad (1.3.5)$$

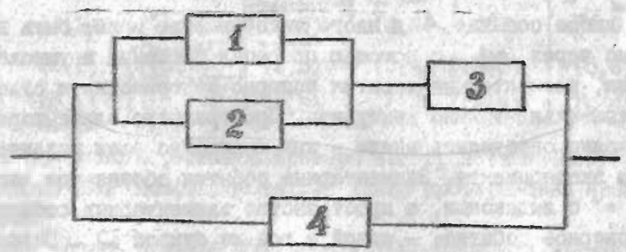


Рис.3

Пример 6. Опыт состоит в случайном выборе одной карты из колоды в 36 карт. Рассмотрим события: $A=\{$ вынутая карта оказалась пиковой масти $\}$; $B=\{$ вынутая карта оказалась картинкой $\}$; $C=\{$ вынутая карта оказалась дамой $\}$. В чем заключаются события: 1) $A+B$; 2) $A-C$; 3) $A+B+C$; 4) AB; 5) AC ; 6) ABC ; 7) $\bar{B}C$; 8) $B+\bar{C}$; 9) $B(C-A)$; 10) $C-(AB)$.

1.4. Пространство элементарных событий

Пространство элементарных событий является первичным понятием в математической модели случайного эксперимента. Его введение начнем с примера. Бросается игральная кость, и пусть событие A_i означает, что выпала грань с i-очками (или, кратко, выпало i очков), $i=\overline{1,6}$, а событие B – выпало четное число очков. Ясно, что событие B является составным, т.е. оно может быть представлено через события A_i, $i=\overline{1,6}$ с помощью операций сложения и умножения. Например, $B=A_2+A_4+A_6$. В этом случае события A_i, $i=\overline{1,6}$ являются простыми: ни одно из них не может быть записано через остальные с помощью операций сложения и умножения. Подчеркнем также, что события A_i, $i=\overline{1,6}$ несовместны между собой и в опыте одно из них обязательно происходит, или кратко:

1) $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{6} A_i = \Omega$.

Рассмотрим теперь произвольный эксперимент, и пусть $\{\omega_\alpha\}$ – множество его исходов ω_α [3].

Множество $\{\omega_\alpha\}$ называют пространством [4] элементарных событий (исходов), а каждый его элемент ω_α – элементарным событием (исходом), если выполнены следующие условия:

1) $\omega_\alpha \cdot \omega_\beta = \emptyset$, $\forall \alpha \neq \beta$,

2) $\sum\limits_{\alpha} \omega_\alpha = \Omega$,

3) любое событие A данного эксперимента может быть представлено через ω_α с помощью операций сложений и умножений.

Итак, элементарные события попарно несовместны и одно из них обязательно должно наступить. Пространство элементарных событий можно определить иначе – как множество всех различных исходов эксперимента. Элементарные события обозначают часто буквой ω с индексами, а пространство элементарных событий, как и достоверное событие, – одной и той же буквой Ω. Целесообразность такого обозначения станет понятной чуть позже.

Примером пространства элементарных событий эксперимента с

[3] Когда число элементов может быть бесконечным, для нумерации используют греческие буквы α, β, γ и др. Для нумерации конечных множеств часто привлекают латинские буквы i, j, k ...

[4] Напомним, что в математике под пространством понимают универсальное для данного рассмотрения множество.

подбрасыванием игральной кости является множество

$$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}.$$

Приведем другие примеры пространств элементарных событий.

Пример 1. Подбрасывают монету, и пусть Γ – падение гербом вверх, а P – обратной стороной. Тогда $\Omega=\{\Gamma, P\}$.

Пример 2. Одновременно бросают две игральные кости. Пронумеруем их произвольно. В качестве элементарного события можно выбрать упорядоченную пару чисел (i,j), $i,j=1,6$, где i – число очков на первой кости, а j – на второй. Тогда

$$\Omega = \{(i,j),\ i,j=\overline{1,6}\}.$$

Это пространство элементарных событий удобно изображать в виде табл.1.

Таблица 1

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

До сих пор рассматривались примеры пространств элементарных событий с конечным числом элементов. Такие пространства называют дискретными.

Приведем теперь примеры недискретных пространств элементарных событий.

Пример 3. Монету подбрасывают до тех пор, пока она не упадет гербом вверх. Очевидно, что элементарные события могут быть записаны так:

$\omega_1 = \Gamma$,

$\omega_2 = P\Gamma$,

$\omega_3 = PP\Gamma$,

$$\omega_n = \underbrace{P,\ldots,P}_{n-1 \text{ раз}}Г$$

. . . .

Уточним, что элементарные события ω_1, ω_2, ..., ω_n, ... соответствуют случаям, когда монета падает гербом вверх впервые при I-м, 2-м, ..., n-м n-подбрасывании монеты. Итак, $\Omega = \{Г; PГ; \ldots\}$. Это пространство содержит бесконечное (счетное) число элементов.

Пример 4. В единичном квадрате на плоскости произвольно ставится точка. Введем на плоскости декартову систему координат (рис.4). Тогда элементарное событие можно характеризовать координатами точки, $\omega = (x, y)$, а $\Omega = \{(x,y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

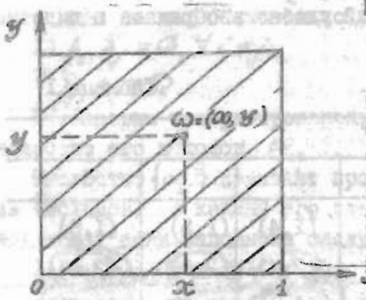


Рис.4

Множество Ω содержит бесконечное (несчетное) число элементов.

Введенные понятия элементарного события, пространства элементарных событий являются относительными в том смысле, что для одного и того же эксперимента их можно определить по-разному. Поясним сказанное примером.

Пример 5. Эксперимент состоит в стрельбе по мишени.

1. В качестве элементарного исхода полагаем число выбитых очков. Тогда $\Omega = \{i, i = \overline{0,10}\}$.

2. На мишени проводим декартову систему координат (рис.5). В этом случае элементарный исход можно описывать координатами точки, т.е. $\omega = (x, y)$, а $\Omega = \{(x, y)\}$.

3. В качестве ω можно выбрать тройку (x, y, t), где t – время выстрела.

4. Элементарное событие можно описывать траекторией пули, полагая

$$\omega = (x(t), y(t), z(t)),$$

где

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

– параметрическое уравнение траектории в некоторой выбранной трехмерной декартовой системе координат.

Какому способу отдать предпочтение? Ответ на этот вопрос зависит от цели эксперимента. Разумеется, надо выбирать наиболее простой способ. Если проводится соревнования по стрельбе, то достаточно ограничиться первым способом. Если же идет тренировочная стрельба, то для установления "кучности" попадания надо выбрать второй способ. Когда мишень движется, то, по-видимому, потребуется третий способ.

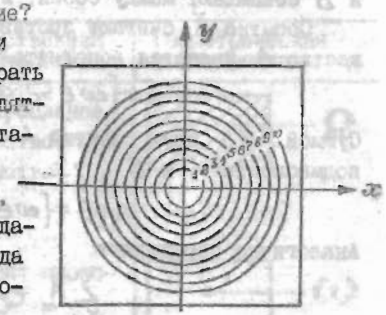


Рис.5

В связи с возможной неоднозначностью определения элементарных событий иногда не уточняют способ их введения.

I.5. Случайные события и действия над ними

Как указывалось, первым этапом в построении математической модели случайного эксперимента является выбор пространства элементарных событий. Если это сделано, то можно дать математическое определение события – под ним понимают подмножество из Ω. В частности, невозможное событие представляет собой пустое множество $\varnothing$ (отсюда и его обозначение), а достоверное – совпадает с пространством элементарных событий. (Этим оправдано использование символа Ω.) Говорят, что произошло (наступило) событие A, если в опыте реализовалось элементарное событие $\omega \in A$. В противном случае, когда $\omega \bar{\in} A$, событие A считается ненаступившим. Заметим, что множественная трактовка событий обедняет их фактическое содержание. Так, в примере 2 подраздела I.2 вводились два различных события: A – число n простое, B – число $(n-1)!+1$ делится без остатка на n. Теперь эти события отождествляются. Таким образом, теория вероятностей не ставит своей целью изучение происхождения события. Ее основная задача состоит в ответе на вопрос: как часто может появиться в опыте то или иное событие?

Поскольку события отождествляются с подмножествами из Ω, то легко строго определить введенные в подразделе I.2 интуитивные отношения и действия над событиями.

Говорят, что событие A влечет B, если множество A есть подмножество B, и записывают $A \subseteq B$.

События A и B считают эквивалентными, если подмножества A и B совпадают между собой, и записывают $A=B$.

Событие $\bar{A}$ считают противоположным событию A, если подмножество $\bar{A}$ является дополнительным к множеству A, т.е.

$$\bar{A}=\{\omega\in\Omega \mid \omega \bar{\in} A\}.$$

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют объединение $A\cup B$ двух подмножеств A и B, т.е.

$$A+B=\{\omega\in\Omega \mid (\omega\in A)\vee(\omega\in B)\}.$$

Аналогично определяют

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha}=\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

Произведением AB двух событий A и B называют пересечение $A\cap B$ подмножеств A и B, т.е.

$$AB=\{\omega\in\Omega \mid (\omega\in A)\wedge(\omega\in B)\}.$$

Эту операцию естественным образом обобщают на любое число событий, полагая

$$\prod_{\alpha} A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}.$$

Разностью $A-B$ двух событий A и B называют разность $A-B$ множеств A и B, т.е.

$$A-B=\{\omega\in\Omega \mid (\omega\in A)\wedge(\omega \bar{\in} B)\}.$$

События A и B считают несовместными, если подмножества A и B не имеют общих элементов, т.е. $A\cap B\neq\varnothing$.

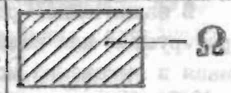
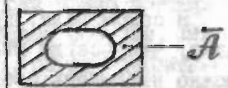
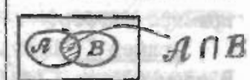
Для лучшего понимания введенные отношения и операции над событиями удобно изображать геометрически с помощью диаграмм Венна, полагая в качестве пространства элементарных исходов множество точек квадрата (табл.2).

Множественная интерпретация событий упрощает установление различных отношений между ними. Часто при этом используется принцип двойственности. Пусть имеется некоторое утверждение, составленное из подмножеств Ω с помощью операций $(\cup,\cap,\subset,\supset,=,\bar{A})$. Тогда оно останется справедливым, если одновременно сделать следующие замены:

$$\cup\to\cap,\ \subset\to\supset,\ \bar{A}\to A,$$

$$\cap\to\cup,\ \supset\to\subset,\ A\to\bar{A}.$$

Таблица 2

Обозначение	Вероятностная терминология	Множественная терминология	Геометрическая иллюстрация
Ω	Пространство элементарных событий (достоверность событий)	Универсальное множество. Пространство	
ω	Элементарное событие	Элемент множества Ω	
A	Событие	Подмножество из Ω	
$\varnothing$	Невозможное событие	Пустое множество	
$\bar{A}$	Противоположное событие	Дополнительное множество к A	
$A\subseteq B$	Событие A влечет за собой B	A - подмножество B	
$A=B$	Эквивалентные события	Равные подмножества	
$A+B$ $(A\cup B)$	Сумма двух событий	Объединение двух множеств $(A\cup B)$	
AB $(A\cap B)$	Произведение двух событий	Пересечение двух множеств	
$A-B$ $(A\setminus B)$	Разность событий	Разность множеств	
$AB=\varnothing$ $(A\cap B=\varnothing)$	Несовместные события	Непересекающиеся подмножества	

Пример I. Пусть $A\subset \bar{B}\cup C$. Тогда $\bar{A}\supset B\cap\bar{C}$.
С помощью принципа двойственности решение примеров 3 и 4 автоматически следовало из примеров I и 2 (см.подраздел I.3).

В заключение раздела заметим, что поскольку событие интерпретируется как подмножество из Ω , то для записи операции сложения и умножения можно использовать также соответственно операцию объединения множеств и пересечения. Эквивалентные события можно считать равными.

I.6. Алгебра событий

Вторым этапом в построении математической модели случайного эксперимента является указание множества $\mathcal{F}=\{A\}$ (пространства) наблюдаемых событий A . Естественно потребовать, чтобы:

1) $\emptyset, \Omega\in\mathcal{F}$,
2) $A\in\mathcal{F}\Rightarrow\bar{A}\in\mathcal{F}$,
3) $A_i\in\mathcal{F},\ i=\overline{1,n}\Rightarrow A_1+A_2+\ldots+A_n\in\mathcal{F}$,
4) $A_i\in\mathcal{F},\ i=\overline{1,n}\Rightarrow A_1 A_2\ldots A_n\in\mathcal{F}$.

В самом деле, принадлежность $\emptyset$, Ω (т.е. условие I) означает, что всегда известно, проведен эксперимент или нет. Если можно наблюдать событие A , то тем самым получаем информацию о наступлении или ненаступлении противоположного события (см.условие 2). Из наблюдений событий $A_i,\ i=\overline{1,n}$ можно судить о "наступлении" их суммы и произведения (условия 3 и 4).

Множество $\mathcal{F}$, удовлетворяющее условиям I-4, называют алгеброй событий. Если условия 3 4 справедливы при $n\to\infty$, то множество $\mathcal{F}$ называют σ-алгеброй. Уточним, что алгебра $\mathcal{F}$ замкнута относительно конечного числа операций сложений и умножений, а в σ-алгебре $\mathcal{F}$ бесконечное число этих операций над ее элементами не выводят из $\mathcal{F}$, т.е. снова получается элемент $\mathcal{F}$. Приведем примеры алгебр.

Пример I. Пусть эксперимент состоит в подбрасывании монеты. В этом случае $\Omega=\{Г,Р\}$, а алгебра $\mathcal{F}=\{\emptyset,\Omega,Г,Р\}$, т.е. состоит из четырех подмножеств из Ω .

Пример 2. Пусть эксперимент состоит в стрельбе по мишени. Тогда $\Omega=\{0,1,\ldots,10\}$, где i - число выбитых очков. Алгебра содержит в себе множества $\emptyset$, Ω и все подмножества из Ω .

Пример 3. Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$.
Построить алгебру событий $\mathcal{F}$, содержащую в себе подмножества ω_1, ω_2, ω_3 . Очевидно, алгебра $\mathcal{F}$ состоит из элементов

$$\emptyset,\ \Omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \{\omega_1,\omega_2\},\ \{\omega_1,\omega_3\},\ \{\omega_2,\omega_3\}.$$

В дальнейшем будем понимать под событиями лишь подмножества $A\in\mathcal{F}$. Множества, принадлежащие алгебре $\mathcal{F}$, называют измеримыми. Таким образом, событие есть измеримое подмножество из Ω . Это и есть окончательное математическое определение случайного события.

Пару $(\Omega,\mathcal{F})$ называют измеримым пространством. Обычно здесь у студентов возникают два следующих естественных вопроса:

I. Зачем требуется введение алгебры событий $\mathcal{F}$ и почему, скажем, нельзя в качестве $\mathcal{F}$ рассматривать совокупность всех подмножеств $A\subset\Omega$?

2. Почему подмножества $A\in\mathcal{F}$ называют измеримыми?
Ответы на оба вопроса будут даны далее. Отметим только, что для дискретного пространства элементарных событий часто выбирают алгебру, состоящую из всех подмножеств.

I.7. Частота события и интуитивное представление о вероятности

Пусть имеется некоторый эксперимент, который можно повторять неограниченное число раз, а A - его произвольное событие. Проведем эксперимент n раз и допустим, что в m_A из них наблюдалось событие A . Отношение m_A/n называют частотой события A и обозначают

$$\hat{P}(A)=\frac{m_A}{n}.$$

Установим ряд простых свойств частоты:

1) $\hat{P}(\emptyset)=0$,
2) $\hat{P}(\Omega)=1$,
3) $0\le\hat{P}(A)\le 1,\ \forall A\in\mathcal{F}$,
4) $\hat{P}(A+B)=\hat{P}(A)+\hat{P}(B),\ \forall AB=\emptyset$.

В самом деле, $m_\emptyset=0$, $m_\Omega=n$, $0\le m_A\le n$. Отсюда непосредственно следуют свойства I-3.

Если события A и B несовместны ($AB=\emptyset$), то в каждом опыте может появляться лишь одно из них; значит, $m_{A+B}=m_A+m_B$. После деления на n получим свойство 4.

Частота $\hat{P}(A)$ содержит в себе определенную информацию о том, как часто в опыте может появиться событие A . Однако эта характеристика обладает существенным недостатком. Ее значения могут изменяться от одной серии[5] опытов к другой. Если, например, при 10-кратном подбрасывании монета упала гербом вверх 4 раза, то это не означает, что при повторной серии опытов она упадет так же ровно 4 раза. Другими словами, m_A не является однозначной функцией .

Одно из фундаментальных открытий человеческой деятельности состоит в том, что для многих случайных явлений установлено стремление частоты событий к постоянной величине при неограниченном возрастании числа опытов. Впервые такого рода устойчивость частот была подмечена на явлениях демографического характера. Уже в древнем мире было замечено, что отношение числа родившихся мальчиков к числу рождений остается из года в год почти постоянным. В более позднее время проводились обширные исследования статистики народонаселения; была установлена устойчивость процента, например, смертности людей определенного возраста, распределения людей по росту, ширине груди и пр.

Экспериментальным изучением устойчивости частоты в простейших экспериментах (типа подбрасывания монеты, иглы) занимались ученые Бюффон, Пирсон и др.

В настоящее время многочисленные примеры устойчивости частот можно найти в ядерной и статистической физике, астрофизике, а также в других областях науки и техники.

Таким образом, для широкого круга случайных явлений постоянная, к которой стремится частота $\hat{P}(A)$ при неограниченном возрастании числа опытов, является объективной числовой характеристикой события A . Эту постоянную и понимают как вероятность события A и обозначают ее $P(A)$. Формально ее можно записать как

$$P(A) := \mathcal{L}im_{n\to\infty} \hat{P}(A) = \mathcal{L}im_{n\to\infty} \frac{m_A}{n} . \qquad (1.7.1)$$

Здесь символом $\mathcal{L}im$ обозначают некоторый предел, вводимый на интуитивном уровне.

Напомним, что m_A не является, вообще говоря, однозначной функцией n . Поэтому в формуле (1.7.1) нельзя использовать обычный предел $\lim$, рассматриваемый в математическом анализе. Что собой представляет интуитивный предел $\mathcal{L}im$ -в дальнейшем не существенно. Будем считать только, что он обладает арифметическими свойствами обычного предела $\lim$. Тогда из перечисленных ранее свойств 1, 2 и 4 следует , что вероятность $P(A)$, определенная на

---

[5] Под серией понимают n -кратное повторение опыта.

интуитивном уровне по формуле (1.7.1), должна обладать аналогичными свойствами частоты $\hat{P}(A)$. В частности:

1) $P(A)=\mathcal{L}im_{n\to\infty}\hat{P}(A)=\mathcal{L}im_{n\to\infty} 0=0$,

2) $P(\Omega)=\mathcal{L}im_{n\to\infty}\hat{P}(\Omega)=\mathcal{L}im_{n\to\infty} 1=1$,

3) $P(A+B)=\mathcal{L}im_{n\to\infty}[\hat{P}(A)+\hat{P}(B)]=\mathcal{L}im_{n\to\infty}\hat{P}(A)+\mathcal{L}im_{n\to\infty}\hat{P}(B)=P(A)+P(A),\ \forall A\cdot B=\varnothing$.

Вспомним, что если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то при достаточно больших n можно считать $a_n \approx a$. Аналогично будем поступать и с интуитивным пределом, полагая

$$P(A) \approx \hat{P}(A) = \frac{m_A}{n} . \qquad (1.7.2)$$

Формула (1.7.2) дает так называемую частотную интерпретацию вероятности, к которой часто прибегают для проведения качественных рассуждений и введения новых понятий.

1.8. Вероятностное пространство

Последним этапом в построении вероятностной модели случайного эксперимента является определение вероятности $P(A)$ событий $A\in\mathcal{F}$. Как же подступиться к ее введению? Будем исходить из того, что каждое событие $A\in\mathcal{F}$ обладает интуитивной вероятностью, даваемой формулой (1.7.1). Другими словами, существует функция, которая любому событию $A\in\mathcal{F}$ ставит в соответствие число. Тогда она должна удовлетворять свойствам 1-3. Именно эти свойства выбирают для математического определения вероятности.

Итак, вероятностью (или вероятностной мерой) называют числовую функцию $P(A)$, заданную на алгебре $\mathcal{F}$ и удовлетворяющую следующим условиям (аксиомам):

1) $P(A)\geqslant 0$ (неотрицательность),

2) $P(\Omega)=1$ (нормировка на единицу),

3) $P(A+B)=P(A)+P(B)$ при $AB=\varnothing$ (аддитивность).

$P(A)$ означает вероятность события A .

Говорят, что тройка $(\Omega,\mathcal{F},P)$ определяет вероятностную модель или вероятностное пространство случайного эксперимента, где $\Omega=\{\omega\}$ - пространство элементарных исходов; $\mathcal{F}$ - система его подмножеств $A\subseteq\Omega$, образующих алгебру событий A ; $P = \{P(A) \mid A\in\mathcal{F}\}$ - вероятностная мера. Поэтому вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ является символом теории вероятностей.

Несмотря на длительный период развития теории вероятностей, описанная модель была предложена сравнительно недавно, в 1933 г., советским математиком А.Н.Колмогоровым. К настоящему времени она является общепризнанной. Благодаря ей удалось построить теорию вероятностей аксиоматически, как строгую математическую науку.

При введении вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ обычно возникают два следующих вопроса:

1. Как узнать, применимы или нет вероятностные законы для описания изучаемого случайного явления?

2. Как определить вероятностную меру P, соответствующую данному эксперименту?

Имеется широкий круг задач, связанных со случайным выбором, для которых заведомо применимы вероятностные законы. Если априори это неизвестно, то часто для описания исходов опыта применяют вероятностные модели и по сопоставлению выводов с практикой судят о правомерности выбранной модели.

Вопрос об определении вероятностной меры P в общем случае является сложным. Далее будут приведены ряд моделей, для которых из условия симметрии и других интуитивных соображений может быть указана мера P.

Следует отметить, что оба поставленных вопроса не относятся к области приложений к теории вероятностей, хотя в самой теории есть специальный раздел, называемый математической статистикой, занимающийся, в частности, оценкой вероятности $P(A)$ по результатам испытаний.

Из аксиом 1–3 вытекает ряд простых свойств вероятности, согласующихся с нашими интуитивными представлениями:

1) $A \subseteq B \Rightarrow P(A-B) = P(B) - P(A)$.

Представим $B = A + (B-A)$ и заметим, что $A(B-A) = \varnothing$. Тогда, согласно аксиоме 3, можно записать

$$P(B) = P(A + (B-A)) = P(A) + P(B-A). \qquad (1.8.1)$$

Отсюда непосредственно следует свойство 1;

2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Другими словами, если событие A влечет B, то его вероятность не превосходит вероятности события B.

Свойство 2 выводится из (1.8.1), поскольку $P(B-A) \geq 0$ в силу аксиомы 1;

3) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

Это свойство аналогично условию 3 для частоты события A.

Так как $A \subseteq \Omega$, $P(A) \geq 0$ и $P(\Omega) = 1$ (см.аксиомы 1 и 2), то в силу свойства 2 запишем: $P(A) \leq P(\Omega) \leq 1$;

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

Ясно, что $A + \bar{A} = \Omega$ и $A\bar{A} = \varnothing$. Применяя затем аксиому 3 с $B = \bar{A}$ и учитывая нормировку вероятности, получим

$$1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A});$$

5) $P(\varnothing) = 0$.

$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$;

6) если события A_i, $i = \overline{1,n}$ несовместны между собой, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.8.2)$$

Это свойство выводится из аксиомы 3 методом математической индукции;

7) правило сложения вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \ \forall A, B \in \mathcal{F}. \qquad (1.8.3)$$

Это правило удобно проиллюстрировать геометрически на диаграммах Венна, понимая под вероятностью $P(A)$ события A площадь множества A (рис.6). Правило сложения вероятностей обобщает свойство аддитивности 3 на произвольные события. Когда события A и B несовместны, правило (1.8.3) совпадает с условием 3.

Очевидно, что $A + B = A + (B - AB)$ и $A(B - AB) = \varnothing$.

Применяя аксиому 3, находим $P(A+B) = P(A) + P(B - AB)$.

Согласно свойству 1,

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB).$$

Из последних двух формул получаем (1.8.3);

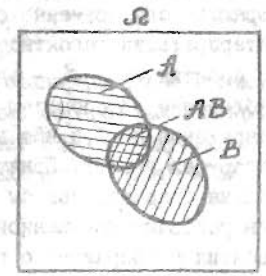


Рис.6

8) правило сложения вероятностей для произвольного конечного числа событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_i A_j) + (-1)^n P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (1.8.4)$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны между собой, соотношение (I.8.4) превращается в (I.8.2).

Правило (I.8.4) выводится из (I.8.2) индукцией по n.

Подчеркнем, что установленные свойства I–8 справедливы для любого эксперимента. В этом состоит общность вероятностных законов.

Приведем пример на правило сложения вероятностей.

Пример I. Имеется достаточно большое число конденсаторов, к которым предъявляются два требования. Они не должны пробиваться:

1) при нормальной температуре T_0=20°C напряжением 1,5 кВт,

2) при повышенной температуре T_*=100°C напряжением 1 кВт.

Необходимо оценить долю конденсаторов, не удовлетворяющих обоим требованиям.

Сформулируем поставленную задачу в терминах теории вероятностей. Рассмотрим мысленный эксперимент, связанный с определением состояний произвольно выбранного конденсатора. Ему будут соответствовать четыре элементарных исхода $\Omega=\{\omega_{11}, \omega_{10}, \omega_{01}, \omega_{00}\}$. Первый индекс у ω характеризует выполнение требования I. Он принимает значение I или 0 в зависимости от того, удовлетворяет или нет конденсатор требованию I. Аналогичный смысл вкладывается во второй индекс. Выберем в качестве алгебры $\mathcal{F}$ совокупность всех подмножеств Ω. Обозначим $A:=\{\omega_{01}, \omega_{00}\}$ и $B=\{\omega_{10}, \omega_{00}\}$ события, состоящие в том, что выбранный конденсатор не удовлетворяет соответственно требованию I и 2. Тогда задача сведется к оценке вероятности $P(AB)=P(\omega_{00})$.

Допустим, имеется возможность испытать N конденсаторов. Если бы удалось определить число d_{AB} конденсаторов, не удовлетворяющих одновременно обоим требованиям, то согласно частотной интерпретации вероятность можно было бы считать $P(AB)\cong d_{AB}/N$. Но события A и B – одновременно ненаблюдаемые. В самом деле, наблюдение за событием A подтверждает, что при возрастании напряжения до 1,5 кВт в условиях нормальной температуры конденсатор был пробит. Понятно, что относительно этого конденсатора нельзя сказать, был бы он пробит или нет при напряжении 1 кВт и в условиях повышенной температуры. То же самое наблюдение события B сопряжено с разрушением конденсатора и исключает наблюдение за событием A. Таким образом, непосредственно определить число d_{AB} нельзя, а значит, и оценить вероятность $P(AB)$. На первый взгляд кажется, что поставленная задача не разрешима.

В действительности дело обстоит иначе. Можно получить оценку $P(AB)$, используя правило сложения вероятностей.

Перепишем формулу (I.8.3) в виде

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B). \tag{I.8.5}$$

Входящие в правую часть уравнения (I.8.5) вероятности можно оценить по специально проведенным испытаниям конденсаторов. Укажем одну из возможных программ экспериментов.

Имеющиеся конденсаторы случайным образом разделяем на две части (выборки): 1-я – объемом n, 2-я – объемом $m=N-n$. К конденсаторам 1-й выборки (объемом n) подводим напряжение 1,5 кВт при нормальной температуре и определяем число d'_A конденсаторов, которые оказались пробитыми. Затем к годным конденсаторам[6] (всего их $n-d'_A$) подводим напряжение 1 кВт при повышенной температуре. В результате найдем число d'_{A+B} конденсаторов 1-й выборки, которые не удовлетворяют хотя бы одному из требований 1 и 2.

Конденсаторы 2-й выборки испытываем при повышенной температуре, а затем при нормальной. После эксперимента определяем число конденсаторов (d''_B и d''_{A+B}) 2-й выборки, которые соответственно не удовлетворяют требованию 2 и хотя бы одному из требований.

В соответствии с частотной интерпретацией вероятности можно считать

$$P(A)\approx\frac{d'_A}{n},\ P(B)\approx\frac{d''_B}{m},\ P(A+B)\approx\frac{d'_{AB}+d''_{A+B}}{n+m}.$$

Подставляя эти выражения в (I.8.5), получим искомую оценку:

$$P(AB)=\frac{d'_A}{n}+\frac{d''_B}{m}-\frac{d'_{A+B}+d''_{A+B}}{n+m}.$$

В примере I описана одна из программ планирования и оценки экспериментов с ненаблюдаемыми одновременно параметрами. Разработка теории таких экспериментов составляет одно из научных направлений, развиваемых на кафедре "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э.Баумана.

---

[6] В дальнейшем предполагается, что предварительное нагружение конденсаторов напряжением, меньшим пробивного, не изменяет его технические характеристики.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Определение модели

Вероятностную модель случайного эксперимента называют классической, если:

1) число элементарных исходов опыта конечно;

2) все элементарные исходы опыта равновозможны (равновероятностны).

Построим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ такого типа экспериментов. Пусть пространство элементарных событий состоит из n элементов, т.е.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

В качестве алгебры $\mathcal{F}$ событий выбираем совокупность всех подмножеств из Ω, включая $\varnothing$ и Ω, т.е.

$$\mathcal{F} = \{A \mid A \subseteq \Omega\}.$$

Рассмотрим произвольное событие $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$. Найдем его вероятность, используя условия 1 и 2.

Поскольку $P(\omega_i) = const$ по i, то в силу свойства аддитивности и нормированности на единицу вероятностной меры запишем

$$1 = P(\Omega) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = c\,n.$$

Отсюда заключаем, что

$$c = P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Снова используя свойство аддитивности, получим

$$P(A) = P\Big(\sum_{j=1}^{k} \omega_{i_j}\Big) = \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n}. \qquad (2.1.1)$$

Итак, подсчет вероятностей событий в рамках классической модели проводят по формуле (2.1.1). Сформулируем иначе правило (2.1.1). Принято называть элементарный исход $\omega_i \in A$ благоприятствующим наступлению события A. Тогда запись (2.1.1) означает, что вероятность события в A равна отношению числа благоприятствующих A исходов к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \qquad (2.1.2)$$

Здесь через $|A|$ обозначено число элементов множества A.

Во избежание возможных недоразумений отметим, что во многих руководствах по теории вероятностей формулу (2.1.1) или (2.1.2)

называют классическим определением вероятностей. Это вызвано тем, что на ранних этапах развития теории вероятностей рассматривались эксперименты, связанные с азартными играми, в которых вероятность различных исходов определялась по формуле (2.1.2).

Напомним, что определение вероятностей вводится аксиоматически, как любая неотрицательная аддитивная и нормированная на единицу функция $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$. Формула (2.1.2) дает подсчет вероятностей в частном случае, когда имеет место классическая модель.

Пример 1. Определить вероятность выпадения четного числа очков при бросании игральной кости.

Выберем в качестве элементарного исхода опыта число выпавших очков. Тогда пространство элементарных событий будет состоять из шести элементов $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, причем все исходы равновозможны. Тем самым эксперимент описывается классической моделью. Пусть A – событие, состоящее в выпадении четного числа очков. Ясно, что $A = \{2,4,6\}$ и, согласно (2.1.2), $P(A) = 3/6 = 0,5$.

Пример 2. Определить вероятность выпадения в сумме восьми очков при одновременном бросании двух игральных костей.

Произвольно одну кость будем считать 1-й, а другую – 2-й. Элементарный исход опыта опишем упорядоченной парой (i,j), где i – число очков на 1-й кости, а j – на 2-й. Пространство элементарных исходов включает 36 элементов (см.табл.1), и все они равновозможны. Значит, эксперимент описывается классической моделью.

Пусть $A = \{$ сумма выпавших очков равна 8$\}$. Из табл.1 заключаем, что $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$. По формуле (2.1.1) получаем $P(A) = 5/36$.

Парадокс де Мере. Что более вероятно, появление в сумме одиннадцати или двенадцати очков при одновременном бросании трех игральных костей?

Игрок француз де Мере считал, что эти исходы равновероятны. Такой вывод он сделал из того, что как 11, так и 12 очков получаются шестью различными способами (если выпавшие очки записать в порядке убывания). Действительно, 11 и 12 очков дают соответственно следующие комбинации:

$[6,4,1]$, $[6,3,2]$, $[5,5,1]$, $[5,4,2]$, $[5,5,3]$, $[4,4,3]$

и

$[6,5,1]$, $[6,4,2]$, $[6,3,3]$, $[5,5,2]$, $[5,4,3]$, $[4,4,4]$.

В то же время де Мере экспериментально убедился в том, что II очков появляются чаще, чем I2.

Несоответствие выводов "теории" с практикой было объяснено знаменитым ученым Паскалем. Ошибочность рассуждений де Мере состояла в том, что рассматриваемые им элементарные исходы не являются равновозможными. А поэтому для подсчета вероятностей появления одиннадцати и двенадцати очков нельзя использовать классическую модель.

Чтобы элементарные исходы были равновозможными, нужно учитывать не только выпавшие очки, но и то, на каких именно костях они появились. Это можно сделать, например, следующим образом. Произвольно пронумеруем кости и в качестве элементарного события выберем упорядоченную тройку[1] чисел (i, j, k), где i - число очков на первой кости, j - на второй, k - на третьей кости. Понятно, что эти элементарные события равновозможны, а всего их $n=6\cdot6\cdot6=216$. Нетрудно видеть, что элементарный исход $[6,4,1]$ возможен тогда, когда наступает одно из шести элементарных событий:

$(6,4,1)$, $(6,1,4)$, $(4,6,1)$, $(4,1,6)$, $(1,6,4)$, $(1,4,6)$.

Исходу $[5,5,1]$ благоприятствуют три элементарных события: $(5,5,1)$, $(5,1,5)$, $(1,5,5)$, а исходу $[4,4,4]$ - одно $(4,4,4)$. Таким образом, исходу $[i,j,k]$ с различными числами i, j, k соответствует шесть элементарных событий, исходу $[i,i,j]$, $i\neq j$ - три, а исходу $[i,i,i]$ - одно элементарное событие. Теперь нетрудно подсчитать, что событию $A=\{$сумма выпавших очков равна II$\}$ благоприятствуют 27 элементарных событий, а событию $B=\{$сумма выпавших очков равна I2$\}$ благоприятствуют 25 элементарных событий. Согласно классической модели,

$$P(A)=27/216, \quad P(B)=25/216$$

Этим завершается объяснение подмеченной де Мере тенденции к более частому появлению одиннадцати очков.

Парадокс де Мере является поучительным, в том смысле, что часто из-за неправильного выбора элементарных событий нарушают условие 2 о равновозможности и тем самым становится неоправданным использование классической модели.

---

[1] В математике под тройкой (i,j,k) понимается упорядоченная запись трех элементов i, j, k

Приведем еще один поучительный пример.

Пример де Мере. Что более вероятно: при одновременном бросании четырех костей получить хотя бы одну единицу (событие А) или при двадцати четырех бросаниях двух костей - хотя бы один раз две единицы (событие В).

Ответ на этот вопрос известен как один из парадоксов де Мере, который считал эти события равновозможными и обвинял математиков в своих проигрышах.

Несложно привести интуитивные соображения в пользу предположения де Мере. В самом деле, 24-кратное бросание двух костей можно рассматривать как 6-кратное бросание четырех костей. Поскольку появление любого числа очков равновероятно, то естественно ожидать в этих шести бросаниях появление еще одной единицы.

В действительности, как ни странно, событие А более вероятно, чем В. Доказательство приведено в [6].

Парадоксы де Мере предостерегают, что не всегда следует полагаться лишь на интуицию. Впрочем, в дальнейшем еще не раз убедимся в том, что интуитивные соображения о случайных явлениях оказываются ошибочными.

2.2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика представляет собой раздел математики, занимающийся подсчетом числа определенных подмножеств, которые можно образовать из данного конечного множества. С помощью приемов и методов комбинаторики упрощается подсчет числа благоприятствующих исходов, необходимого для определения вероятности в рамках классической модели.

Основной принцип комбинаторики (правило умножения). Пусть требуется выполнить последовательно m действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе - n_2 способами, ..., m-е действие - n_m способами, то все m действий могут быть осуществлены $n_1, n_2, \ldots n_m$ различными способами.

Сформулируем это правило на языке теории множеств. Имеется множество $A_i=\{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i\}$, $i=\overline{1,m}$. Элементы из различных множеств A_i считаются разными. Составляем выборку, включая в нее по одному элементу из каждого множества. В частности, выборка $(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_m}^m)$ соответствует случаю, когда из множества A_1 выбран элемент $a_{i_1}^1$, из множества A_2 - элемент $a_{i_2}^2$, ..., из множества A_m - элемент $a_{i_m}^m$. Выборки считают разными, если они отличаются хотя бы одним элементом $a_{i_j}^j$, $j=\overline{1,m}$. Тогда число различных выборок равно $n_1 n_2 \dots n_m$.

Доказательство основного принципа комбинаторики проведем методом математической индукции по m.

При $m=1$ принцип очевиден.

Из двух множеств A_1 и A_2 (т.е. $m=2$) можно образовать $n_1 n_2$ штук пар $(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2)$. Убедимся в этом, для чего составим прямоугольную таблицу (матрицу) (наподобие табл.I) с n_1 строками и с n_2 столбцами так, чтобы на пересечении i-й строки с j-м столбцом оказалась пара (a_i^1, a_j^2). Тогда каждая пара $(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2)$, $a_{i_1}^1 \in A_1$, $a_{i_2}^2 \in A_2$ появится один и только один раз. Поскольку в матрице размером $n_1 \times n_2$ число элементов равно $n_1 \cdot n_2$, утверждение при $m=2$ доказано.

Предполагая выполнимым принцип для любого числа $b<m$ множеств A_i, докажем его справедливость и для m. Будем рассматривать выборку $(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \dots, a_{i_{m-1}}^{m-1}, a_{i_m}^m)$ как пару $(b_j, a_{i_m}^m)$, где b_j – элемент множества B, состоящего из всех $m-1$ упорядоченных выборок $(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \dots, a_{i_{m-1}}^{m-1})$. Согласно предположению множество B состоит из $n_1 n_2 \dots n_{m-1}$ элементов. Применяя затем принцип при $m=2$, заключаем, что имеется $n_1 n_2 \cdots n_{m-1} n_m$ всех пар $(b_j, a_{i_m}^m)$.

Следствие. Если множества A_i, $i=\overline{1,m}$ состоят из одинакового числа элементов n, то из них можно образовать n^m выборок. Это следствие уже использовалось для подсчета числа возможных исходов при одновременном бросании двух и трех игральных костей.

Пример I. Из города N в город M можно добраться самолетом, поездом и автомобилем, а из города M в город K – катером или самолетом. Каково число возможных комбинаций средств для путешествия из города N в город K через город M?

Выберем один из трех возможных вариантов путешествия из N в M. Далее можно продолжить путешествие двумя видами транспорта. Согласно основному принципу комбинаторики число различных способов передвижения равно 3·2=6.

Классической задачей комбинаторики является определение числа возможных способов выбора m из n различных элементов заданного множества A. Составление выборки удобно представлять как последовательное извлечение из множества A его элементов, присваивая первому извлеченному элементу номер I, второму – номер 2 и т.д. Часто процесс выборки описывают еще как размещение

в занумерованные ячейки по одному элементу из множества A.

При подсчете числа возможных выборок необходимо дополнительно указывать следующее:

I) возвращается или нет в заданное множество отобранный элемент. Другими словами, могут или нет в выборке содержаться одинаковые элементы;

2) учитывается или нет порядок извлечения элементов. Другими словами, какие выборки считаются разными.

Рассмотрим отдельно возможные ситуации.

Выбор без возвращения

Так называют способ образования выборки, при котором извлеченный элемент не возвращается обратно в исходное множество A. Понятно, что при таком способе в выборке не могут содержаться одинаковые элементы.

Пусть вначале $m=n$. Перестановками из n элементов называют такие выборки объемов[2] $m=n$, которые отличаются между собой порядком следования элементов. Обозначим исходное множество A, а его элементы a_i, т.е. $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда возможные перестановки могут быть записаны как $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, причем каждый элемент из A содержится только один раз. Две перестановки $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ и $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ считаются разными, если хотя бы на одном месте стоят разные элементы, например, $a_{i_k} \neq a_{j_k}$ для некоторого $k=\overline{1,n}$.

Из множества $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ с тремя элементами можно составить шесть различных перестановок: (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1).

Подсчитаем число P_n различных перестановок, которые возможны из множества с n элементами.

Теорема I.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdots n. \qquad (2.2.1)$$

Очевидно, в качестве a_{i_1} можно выбрать n различных элементов из A; в качестве a_{i_2} можно выбрать любой элемент из $(n-1)$ оставшихся и т.д. Применяя затем основной принцип комбинаторики, получим формулу (2.2.I).

---

[2] Под объемом выборки понимают число ее элементов.

Пример I. Из шести карточек с буквами А,М,Б,В,Т,О наугад последовательно выбирают карточки. Определить вероятность получения слова ТАМБОВ.

Присвоим карточкам номера от I до 6 в соответствии с последовательностью их написания, т.е. А припишем номер I, М - номер 2 и т.д. Обозначим $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ множество из шести первых цифр. В качестве элементарного исхода опыта выберем упорядоченную шестерку[3] $(i_1, i_2, \dots, i_6)$, $i_j \in A$, $i_j \neq i_k$ при $j \neq k$, или, иначе, под элементарным событием будем понимать перестановку из элементов A.

Поскольку по условию задачи последовательно наугад извлекаются карточки, то все элементарные исходы (перестановки из шести цифр) являются равновозможными. Согласно теореме I, число их конечно и составляет $n=6!=720$. Тем самым установлено, что для вычисления вероятности можно воспользоваться классической моделью.

Нетрудно видеть, что появлению слова ..МБОВ благоприятствует одно элементарное событие, а именно перестановка (5,I,2,3, ,4), а, значит, искомая вероятность равна I/720 .

Замечание. Функцию $n!$ (читаемую "эн-факториал") доопределяют и для $n=0$, полагая 0!=I. Целесообразность такого доопределения станет ясной чуть позже. Обобщением $n!$ является гамма-функция

$$\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

которая определяется, в частности, для всех $p>0$. Несложно проверить, что

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$

Кроме того, интегрированием по частям легко установить рекуррентную формулу

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$$

Если $p=n$ (целое число), то получаем $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=\dots=n!$

Отсюда с привлечением $1=\Gamma(1)$ находим $1=\Gamma(1)=\Gamma(1+0)=1\cdot 0!=0!$ Таким образом, гамма-функция обобщает $n!$ на любые положительные числа.

3 Слово "упорядоченную" можно опустить, поскольку под шестеркой понимается упорядоченное множество из шести элементов.

Формула Стирлинга. Функция $n!$ чрезвычайно быстро возрастает с увеличением n . Так, I0!=3628800, I5!=I307674368000, а число I00! содержит I58 знаков. В связи с этим для приближенного вычисления $n!$ при больших значениях n используют формулу Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right),\quad 0<\theta_n<1.$$

Часто в формуле Стирлинга полагают $\theta_n=0$.

Размещениями из n элементов по m называют такие выборки $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ объема m из множества A , которые отличаются между собой как содержанием элементов, так и порядком их следования.

Пример 2. Из множества $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ можно образовать шесть различных размещений из трех элементов по два: (a_1,a_2), (a_2,a_1), (a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_2,a_3), (a_3,a_2).

Подсчитаем число различных размещений из n элементов по m, которое обозначим $(n)_m$.

Теорема 2.

$$(n)_m = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

Доказательство проводится так же, как и теоремы I с применением основного принципа комбинаторики.

Следствие. При $m=n$ размещения совпадают с перестановками и $(n)_n=n!$.

Замечание. Число $(n)_m$ можно записать с помощью факториалов:

$$(n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Часто функцию $(n)_n$ доопределяют для любого значения аргумента n .

Пример 3. Для открытия кодового замка с десятью цифрами 0,I,...,9 надо последовательно нажать три кнопки с цифрами 3,7 и I. Определить вероятность открытия замка (событие В), если наугад нажимаются последовательно три различные кнопки.

Выберем в качестве элементарных исходов (упорядоченные) тройки (i, j, k) различных чисел из множества $\{0,1,\dots,9\}$, или, другими словами, размещение из десяти чисел по три. По условию задачи все элементарные исходы равновозможны, а их число конечно и, согласно теореме 2, равно $(10)_3=10\cdot 9\cdot 8=720$. Тем самым для подсчета вероятности события В можно воспользоваться классической моделью эксперимента. Нетрудно понять, что событию В благоприятствует один элементарный исход (3,7,I), а значит,

$P = \frac{(7)_2 \cdot (5)_4}{(12)_6}$

$$P(B)=\frac{1}{720}.$$

Сочетаниями из n элементов по m называют такие выборки объемом m, которые отличаются между собой лишь составом их элементов.

Пример 4. Различными сочетаниями из трех элементов $\{a_1, a_2, a_3\}$ по два являются лишь три выборки $[a_1,a_2]$, $[a_1,a_3]$, $[a_2,a_3]$.

Во избежание возможных недоразумений уточним порядок использования скобок $\{\ldots\}$, $(\ldots)$, $[\ldots]$ для записи различных множеств. Символ $\{\ldots\}$ применяют для обозначения множества. Так, запись $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ говорит о том, что имеется множество элементов a_i, $i=\overline{1,4}$. Порядок записи элементов в фигурной скобке несуществен. Однако следует отметить, что все элементы a_i в записи $\{a_1,\ldots,a_n\}$ должны быть различными. Круглые скобки применяют для обозначения упорядоченных выборок $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, причем необязательно, чтобы все элементы были различными. Прямые скобки используют для неупорядоченных выборок $[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}]$, т.е. порядок следования элементов в этих скобках не существен. В отличие от записи $\{\ldots\}$ в прямых скобках $[\ldots]$ могут встречаться одинаковые элементы.

Подсчитаем число C_n^m различных сочетаний из n элементов по m.

Теорема 3.

$$C_n^m=\frac{(n)_m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^{n-m}.$$

Согласно теореме (2), имеется $(n)_m$ различных размещений из n элементов по m. Зафиксируем подмножество $B\subset A$, содержащее m элементов. Выделим из всех размещений $(a_{i_1},\ldots,a_{i_m})$ такие, которые составлены из элементов множества B. Понятно, что эти размещения можно рассматривать как перестановки элементов множества B. По теореме I, число их равно $m!$. При подсчете сочетаний надо выбрать лишь одного представителя из этих размещений. Поскольку множество B выбиралось произвольно, то число C_n^m различных сочетаний равно числу всех размещений из элементов по m, деленному на $m!$

Замечание. Наряду с C_n^m применяют обозначение $\binom{n}{m}=\frac{(n)_m}{m!}$. Функцию $\binom{n}{m}$ называют биномиальными коэффициентами, они определяются для любого числа n (не обязательно целого).

Пример 5. Определить вероятность максимального выигрыша (событие В) в спортлото 6 из 49 по одному билету.

По условию игры порядок отметки номеров не является существенным, важно только, какие указаны номера. Поэтому естественно выбрать в качестве элементарного исхода сочетание из 49 номеров I,2,...,49 по 6. Согласно теореме 3, число различных элементарных событий равно C_{49}^6. По правилам игры в спортлото естественно предположить, что все элементарные исходы равновероятны. Таким образом, для подсчета вероятности события В можно применять классическую схему. Ясно, что событию В (соответствующему одному заполненному билету), благоприятствует одно элементарное событие. Значит,

$$P(B)=\frac{1}{C_{49}^6}\approx 7{,}2\cdot 10^{-8}.$$

Выбор с возвращением

Так называют способ образования выборок, предполагающий перед каждым извлечением элемента возвращение всех остальных в исходное множество A. Понятно, что в этом случае в выборке могут содержаться одинаковые элементы.

Упорядоченной выборкой называют такие, которые отличаются между собой как составом элементов, так и последовательностью их следования. Упорядоченные выборки, как и раньше, будем обозначать круглыми скобками $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$, где $a_i\in A$, $i=\overline{1,m}$. Например, из множества $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ $(n=3)$ можно составить девять различных упорядоченных выборок из двух элементов $(m=2)$: (a_1,a_1), (a_1,a_2), (a_2,a_1), (a_2,a_2), (a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_3,a_3), (a_2,a_3), (a_3,a_2).

Теорема 4. Число различных упорядоченных выборок из n элементов по m равно n^m.

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из основного принципа комбинаторики, поскольку в качестве i-го по порядку элемента выборки можно взять любой элемент из A, а их всего n.

Пример 6. Из n элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ случайным образом с возвращением извлекается упорядоченная выборка объемом m. Определить вероятность того, что в выборке не будут содержаться одинаковые элементы (событие В), т.е. как-будто выборка составлена без возвращения.

В качестве элементарных исходов опыта выберем упорядоченные выборки $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ объемом m, образованные из n элементов с их возвращением. Согласно теореме 4, число таких исходов конечно и равно n^m. Событию B благоприятствуют исходы, соответствующие упорядоченным выборкам, которые могут быть получены без возвращения элементов. Число таких выборок составляет $(n)_m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ (см. теорему 2). По условию задачи все элементарные исходы равновероятны. Значит, для подсчета вероятности можно воспользоваться классической моделью и записать

$$P(B)=\frac{(n)_m}{n^m}. \qquad (2.2.2)$$

Этот пример имеет многочисленное применение на практике. Рассмотрим одно из них, которое выявляет удивительные свойства случайных явлений.

Пример 7. Пусть в аудитории находится m студентов. В первом приближении можно считать, что день рождения каждого студента приходится на один из 365 дней (год невисокосный) и любой день рождения равновозможен. Определить вероятность того, что по крайней мере у двух студентов дни рождения совпадают (событие B).

Замечание. Прежде чем решать этот пример, давайте "проверим" свою интуицию. Поставленную задачу можно интерпретировать следующим образом. Имеется m шаров (понимаем дни рождения студентов), которые наугад размещаются в 365 ячейках (понимаем листки календаря). Допустим, что $m=60$. Поскольку число ячеек более чем в шесть раз! больше числа шаров, то интуитивно кажется, что совпадение дней рождений (или появление хотя бы в одной ячейке двух и более шаров) должно быть порядка $60/365 \approx 1/6$.

Посмотрим, какой ответ даст точное решение.

Для подсчета вероятности противоположного события $\bar{B}$ (дни рождения у всех студентов различны), очевидно, можно воспользоваться формулой (2.2.2), а значит,

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{(365)_m}{365^m}.$$

Некоторые значения искомой вероятности представлены в табл.3.

Таблица 3

m	4	16	22	23	40	64
$P(B)$	0,016	0,284	0,476	0,507	0,891	0,997

Итак, вспомним интуитивные оценки вероятности при $m=60$. Оказывается, эта вероятность не только больше 1/2, но близка к единице. Если в группе имеется 23 студента, то с вероятностью 1/2 найдутся два студента с одинаковыми днями рождения.

Вентцель Е.С.[4] рассказывала, что она часто на первой лекции потока (порядка 50 студентов) направляла по рядам листок, в котором студенты отмечали свои дни рождения, и всегда находились студенты с одинаковыми днями рождения.

Подражая Е.С.Вентцель, я также всегда провожу аналогичный опыт, но, как правило, в потоке с меньшим количеством студентов, порядка 20–30. В моей практике не было случая, чтобы не находились студенты с одинаковыми днями рождения. Отсюда можно сделать предположение, что классическая модель, предполагающая равновозможность всех дней рождения, является адекватной.

Любопытно и полезно сравнить число всех упорядоченных выборок объемом n, полученных без возвращения и с возвращением элементов из множества $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Из теорем 1 и 4 непосредственно следует теорема 5.

Теорема 5. Отношение числа всех упорядоченных выборок объемом m, полученных без возвращения элементов, к числу аналогичных выборок, получаемых с возвращением элементов, равно $(n)_m/n^m$.

Следствие. При $m=n$ это отношение равно $n!/n^n$. Функция $n!/n^n$ быстро убывает с увеличением n. Так, например, при $n=7$ она равна 0,00612 ...

Приведем пример, подтверждающий полезность теоремы 5, в частности для $n=7$.

Пример 8. В городе в неделю происходит (в среднем) семь дорожно-транспортных происшествий (ДТП). Считая любые распределения ДТП по дням недели равновозможными, определить вероятность того, что в каждый день недели случается одно ДТП (событие B).

Замечание. Перед решением примера оцените интуитивно значение этой вероятности.

Введем множество $A=\{a_1, a_2, \dots, a_7\}$, элемент a_i которого означает, что ДТП произошло в i-й день недели (т.е. понедель-

[4] Профессор, блестящий педагог, чьи учебники и книги получили высокое одобрение научной общественности. Известна и как писательница под псевдонимом "И.Грекова". Ею, в частности, написана повесть "Кафедра".

ник, вторник и т.д.). Положим в качестве элементарного исхода упорядоченную выборку $(a_{i_1},\dots,a_{i_7})$ с возвращением из A. Согласно теореме 4, число таких выборок конечно и равно 7^7. По условию задачи все элементарные исходы, т.е. упорядоченные выборки $(a_{i_1},\dots,a_{i_7})$, равновозможны.

Следовательно, подсчет искомой вероятности можно осуществить в рамках классической модели. Событию B благоприятствуют элементарные исходы, т.е. неупорядоченные выборки $(a_{i_1},\dots,a_{i_7})$, которые содержат все элементы из A. Другими словами, неупорядоченные выборки, получены из A без возвращения элементов. Число таких выборок, по теореме I, равно 7! Используя основную формулу (2.I.I) или теорему 5, запишем

$$P(B)=\frac{7!}{7^7}=0{,}00162\ldots$$

Прокомментируем полученный результат, воспользовавшись частотной интерпретацией вероятности. Вопреки ожидаемому оказывается, что практически в каждой неделе будут встречаться дни, в которые произойдет не менее двух ДТП, и только, в среднем, в одной неделе из I65 ДТП будут распределены равномерно по дням недели.

Зададим вопрос: какое распределение ДТП по дням более вероятно? Не уверен, что интуитивно вы укажите его правильно. Естественно предположить, что это распределение должно быть равномерным, поскольку по условию задачи нет выделенных ("опасных") дней. В действительности более вероятно следующее распределение по дням: 2,2,I,I,I,0,0. Оно наступает с высокой вероятностью 0,32I... Вероятности других распределений по дням указаны в примере I раздела 2.3.

Вот такие неожиданности таят в себе случайные явления.

Теорема 5 находит широкое применение для решения задач теории массового обслуживания. Так под ДТП можно понимать прибытие судов в порт, железнодорожных вагонов - на станции, а также поступление сообщений на телетайп и т.п.

Пример 9. m телеграмм случайным образом распределяются по n каналам связи $(n\ge m)$. Найти вероятность события, когда все телеграммы будут одновременно обслужены (событие B), или, другими словами, на каждый канал придется не более одной телеграммы.

Пронумеруем телеграммы, и пусть $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, где a_i - канал связи под номером i. Если в качестве элементарного исхода выберем упорядоченную выборку $(a_{i_1},\dots,a_{i_m})$, то по аналогии с примером 8 придем к классической модели, где для подсчета искомой вероятности можно воспользоваться теоремой 5 и записать:

$$P(B)=\frac{(n)_m}{n^m}=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m}.$$

Неупорядоченной выборкой объема m из n элементов называют такие, которые отличаются между собой лишь составом ее элементов (порядок их следования несуществен).

Неупорядоченные выборки, как и ранее, будут обозначаться прямыми скобками $[a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_m}]$. (Здесь порядок записи элементов a_{i_j} может быть любым.)

Например, из множества $\{a_1,a_2,a_3\}$ можно составить шесть неупорядоченных выборок объемом 2:

$[a_1,a_1],[a_2,a_2],[a_3,a_3],[a_1,a_2],[a_1,a_3],[a_2,a_3]$.

Теорема 6. Число неупорядоченных выборок объема m из n элементов составляет $C^m_{n+m-1}=C^{n-1}_{n+m-1}$.

Так как последовательность записи элементов в неупорядоченной выборке не существенна, то будем считать, что $i_1\le i_2\le\dots\le i_m$.

Обозначим звездочкой выбранные элементы, а черточками их номера. Поясним сказанное примером: пусть $n=9$, а $m=6$, тогда запись

```
| | xx |   |   | x | | x |   | xx |
 I  2    3   4   5  6 7   8   9
```

соответствует выборке, в которой элементы a_1, a_3, a_4, a_6, a_8 отсутствуют, элемент a_7 встречается один раз, а элементы a_2 и a_9 - дважды. Понятно, что в принятом представлении неупорядоченной выборки всегда будет присутствовать $n+1$ черточек и m звездочек. Запись должна начинаться и кончаться черточками, но остальные $n-1$ черточек и m звездочек могут быть расположены в произвольном порядке. Отсюда заключаем, что число различных неупорядоченных выборок совпадает с числом различных способов выбора m мест (для звездочек) или $n-1$ мест (для черточек) из $n+m-1$. Согласно теореме 3, это число составляет

$$C^m_{n+m-1}=C^{n-1}_{n+m-1}.$$

Теорема 7. Отношение числа всех неупорядоченных выборок объемом m из n элементов $(m\le n)$ без возвращения к числу всех неупорядоченных выборок с возвращением равно

$$C^m_n/C^m_{n+m-1}.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теорем 3 и 6.

2.3. Урновые модели

Под урновыми понимают такие модели, которые описывают различные манипуляции (эксперименты) с урнами и шарами (например, размещение шаров по урнам). Часто вместо урн и шаров используют соответственно ячейки и дробинки и т.п.

Урновые модели играют важную роль в теории вероятностей. С их помощью удобно пояснять сущность многих определений, методов и выводов теории вероятностей. Но самое главное состоит в том, что решение широкого круга задач, представляющих большой практический интерес, может быть выполнено на основе той или иной урновой модели. Некоторые примеры таких задач будут приведены далее.

Существует много урновых моделей. Рассмотрим лишь один их класс, связанный с размещением шаров по урнам. Ряд других урновых моделей будет представлен в подразделе 2.4.

Итак, пусть имеется n пронумерованных урн и в них последовательно размещают m пронумерованных шаров. Зададимся целью подсчитать число различных размещений.

Так же, как и при выборе элементов, это число зависит от того, как осуществляется размещение. Необходимо дополнительно указать, различаются между собой шары или нет и какое число шаров может находиться в одной урне.

Если шары различны, то их распределение по урнам можно описать упорядоченным набором $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где a_i – номер урны, куда попал i-й шар. В случае неразличимых шаров распределение характеризуется неупорядоченным набором $[a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Здесь a_i – номер урны, в которую помещен шар на i-м шаге.

Таким образом, между составлением выборок из множества, рассмотренного в подразделе 2.3, и размещением шаров по урнам существуют следующие соответствия:

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Различимые шары}) \Longleftrightarrow (\text{Упорядоченная выборка}) \\ (\text{Шары неразличимы}) \Longleftrightarrow (\text{Неупорядоченная выборка})\end{array}\right\} \quad (2.3.1$$

Понятно также, что размещение, при котором в урне не может быть более одного шара, соответствует составлению выборки без возвращения элементов. Размещения, допускающие любое число шаров в урне, можно осуществить составлением выборки с возвращением. Другими словами,

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\text{В урне не может быть}\\ \text{более одного шара}\end{array}\right) \Longleftrightarrow (\text{Выбор без возвращений}) \\ \left(\begin{array}{l}\text{В урне может быть}\\ \text{любое число шаров}\end{array}\right) \Longleftrightarrow (\text{Выбор с возвращением})\end{array}\right. \quad (2.3.2)$$

Из (2.3.1) и (2.3.2) можно составить соответствия, представленные в табл.4.

Таблица 4

Размещение шаров	⟺	Образование выборок
Шары различимые, и в урне не может быть более одного шара	⟺	Упорядоченная выборка без возвращения элементов
Шары неразличимые, и в урне не может быть более одного шара	⟺	Неупорядоченные выборки без возвращения элементов
Шары различимые, и в урне может быть любое число шаров	⟺	Упорядоченная выборка с возвращением элементов
Шары неразличимые, и в урне может быть любое число шаров	⟺	Неупорядоченная выборка с возвращением элементов

С помощью табл.4 и теорем 1-6 подраздела 2.3 легко подсчитать число различных размещений шаров по урнам. Итоговые результаты сведены в табл.5 (указанные в ней характеристики будут объяснены немного далее).

Таблица 5

Размещение	Шары		
	Различимые (упорядоченные выборки)	Неразличимые (неупорядоченные выборки)	Выбор
С запретом	$(n)_m$	C_n^m (статистика Ферми – Дирака)	Без возвращения
Без запрета	n^m (статистика Максвелла – Больцмана)	C_{n+m-1}^m (статистика Бозе – Эйнштейна)	С возвращением

Рассмотрим теперь следующую комбинаторную задачу о заполнении урн шарами без их возвращения. Пусть заданы целые числа z_1, $z_2, \dots, z_n$, удовлетворяющие условию

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = m, \quad z_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (2.3.3)$$

Спрашивается, сколькими способами можно заполнить шарами урны: первую – z_1, вторую – $z_2, \dots$, n-ю – z_n.

Уточним, что порядок урн существен. Например, ($z_1=3$, $z_2=4$) и ($z_1=4$, $z_2=3$) соответствует разным заполнениям. Последовательность шаров в урне не учитывается. Размещения считаются разными, если хотя бы в одной урне оказываются шары с различными номерами

Теорема 8. Число различных размещений m занумерованных шаров по n занумерованным урнам, удовлетворяющих условию (2.3.3), равно

$$\frac{m!}{z_1!\, z_2! \dots z_n!} \qquad (2.3.4)$$

Согласно теореме 3, первая урна может быть заполнена $C_m^{z_1}$ различными способами. После этого останется $m - z_1$ шаров, и, следовательно, вторая урна может быть заполнена $C_{m-z_1}^{z_2}$ различными способами и т.д. Урна под номером $(n-1)$ может быть заполнена $C_{m-z_1-\dots-z_{n-2}}^{z_{n-1}}$ различными способами, а n-я урна – лишь одним способом.

Используя затем основной принцип комбинаторики, получаем число (2.3.4).

Числа (2.3.4) называют полиномиальными коэффициентами.

Применим теорему для подсчета вероятностей различных распределений семи ДТП по дням недели (см.пример [illegible] в подразделе 2.2).

Пример I. Найти вероятности различных распределений по дням недели семи ДТП, без учета их порядка, предполагая любые распределения равновозможными.

В рамках урновой модели эта задача сводится к определению вероятностей различных случайных размещений семи занумерованных шаров по семи урнам без учета их нумерации.

Выберем в качестве элементарного исхода упорядоченную выборку ($a_1, a_2, \dots, a_7$), где a_i – номер урны, куда помещен i-й шар. По условию задачи все исходы ($a_1, a_2, \dots, a_7$) равновероятны, а число их конечно и по правилу умножения равно 7^7. Значит, для подсчета искомых вероятностей можно воспользоваться классической моделью.

Рассмотрим событие, соответствующее числам заполнения 2,2,2, I,0,0,0, т.е. состоящее в том, что в какие-то три урны попадут по два шара, в одну из урн – один шар, а остальные три урны окажутся пустыми. Эти числа заполнения порождают разбиение урн на три подмножества: три ($z'_1=3$) урны с двумя шарами; одна ($z'_2=1$) урна с одним шаром; три ($z'_3=3$) пустых урны. Согласно теореме 7, такое разбиение ($z'_1=3$, $z'_2=1$, $z'_3=3$, $z'_1+z'_2+z'_3=7$) семи урн можно выполнить $7!/3!1!3!$ различными способами. В табл.6 приведены некоторые размещения шаров по нумерованным урнам, соответствующие числам заполнения $z'_1=3$, $z'_2=1$, $z'_3=3$. Каждое из этих разбиений размещений, в силу теоремы 7, может быть осуществлено $(3!)^2$ различными способами.

Используя затем основной принцип комбинаторики, получаем, что число различных заполнений, соответствующих числам 2,2,2,I,0,0,0, равно $(7!/[illegible]!3!) \cdot (7!/(2!)^3)$.

Аналогично подсчитывают число элементарных исходов, благоприятствующих событиям с другими числами заполнения.

Из табл.7 видно, что наиболее часто будет реализовываться размещение 2,2,I,I,I,0,0. Приближенно в среднем оно будет происходить в одну из трех недель.

Таблица 6

Вариант	Число шаров в урне							Число разных способов размещений равно 7!, деленному на
	I-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	
I	0	0	0	I	2	2	3	0!0!0!I!2!2!3!
П	0	0	I	0	2	2	2	0!0!I!0!2!2!2!
Ш	2	I	0	2	0	2	0	2!I!0!2!0!2!0!
...	...	...	...	...	...	...	...	. . . .

Таблица 7

События, соответствующие числам заполнения	Число размещений равно 7!x7!, деленному на	Вероятность (число размещений, деленное на 7^7)
I, I, I, I, I, I, I	7! x I!	0,006I20
2, I, I, I, I, I, 0	5! x 2!	0,I285I8
2, 2, I, I, I, 0, 0	2! 3!2! x 2!2!	0,32I295
2, 2, 2, I, 0, 0, 0	3!3! x 2!2!2!	0,I07098
3, I, I, I, I, 0, 0	4!2! x 3!	0,I07098
3, 2, I, I, 0, 0, 0	2!3! x 3!2!	0,2I4I97
3, 2, 2, 0, 0, 0, 0	2!4! x 3!2!2!	0,026775
3, 3, I, 0, 0, 0, 0	2!4! x 3!3!	0,0I7850
4, I, I, I, 0, 0, 0	3!3! x 4!	0,035699
4, 2, I, 0, 0, 0, 0	4! x 4!2!	0,026775
4, 3, 0, 0, 0, 0, 0	5! x 4!3!	0,00I785
5, I, I, 0, 0, 0, 0	2!4! x 5!	0,005355
5, 2, 0, 0, 0, 0, 0	5! x 5!2!	0,00I07I
6, I, 0, 0, 0, 0, 0	5! x 6!	0,000357
7, 0, 0, 0, 0, 0, 0	6! x 7!	0,000008

Любопытно сравнить вероятности размещений I,I,I,I,I,I,I и 5,I,I,0,0,0,0. Вопреки ожидаемому, значения этих вероятностей близки друг к другу (0,006I20 и 0,005355).

Литература

I. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, I969. 576 с.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, I988. 480 с.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, I988. 447 с.

4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, I982. 256 с.

5. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, I989. 640 с.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, I984. Т.I, 527 с.

7. Карташов Г.Д., Ветров Л.Г., Иванов Г.А. Методические указания к проведению практических занятий по теории вероятностей. М.: МВТУ, I988. 32 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задача I. Одновременно подбрасывают две игральные кости. ~~В вариантах I-IO найти вероятность того, что сумма выпавших очков: I) равна k; 2) меньше $k+1$; 3) больше $k-1$; 4) заключена в промежутке $[\alpha,\beta]$.~~ В вариантах II-30 найти вероятность того, что произведение выпавших очков: I) равно k; 2) меньше $k+1$; 3) больше $k-1$; 4) заключено в промежутке $[\alpha,\beta]$.

Задача 2. На некоторое обслуживающее устройство поступают две заявки. Каждая может поступить в любой момент времени в течение T минут. Время обслуживания первой заявки t_1 минут, второй – t_2 минут. При поступлении заявки на занятое устройство она не принимается. При поступлении ее хотя бы в последний момент времени T заявка обслуживается. Найти вероятность того, что: I) обе заявки будут обслужены; 2) будет обслужена одна заявка.

Задача 3. Задана электрическая схема системы, состоящей из пяти элементов. Событие A_i – отказ i-го элемента за некоторый промежуток времени. Вероятности безотказной работы элементов заданы:

$P(A_i)=0,95$, $i=1,3,5$; $P(A_i)=0,9$, $i=2,4$.

Событие A состоит в безотказной работе всей системы за рассматриваемый промежуток времени. Требуется: I) выразить событие A через A_i или $\bar{A}_i$ ($i=1,2,3,4,5$); 2) найти вероятность $P(A)$ безотказной работы системы.

Задача 4. Из партии, содержащей n изделий, среди которых k – высшего сорта, для контроля последовательно выбирают наугад m изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий окажется ровно l высшего сорта при условии, что выборка производится: I) с возвращением (выбранное изделие после проверки возвращается обратно в партию); 2) без возвращения (выбранное изделие в партию не возвращается).

Задача 5. На склад поступили детали, изготовляемые на трех станках. Изготовлено на станках деталей, %: на первом – a, на втором – b, на третьем – c. Вероятность выпуска бракованных деталей на i-м станке равна P_i ($i=1,2,3$). Определить вероятность того, что изделие, наудачу взятое со склада: I) оказалось бракованным; 2) оказалось небракованным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на j-м станке.

Задача 6. Произведено n выстрелов с постоянной вероятностью попадания при каждом выстреле, равной P.

Для случайной величины m (числа попаданий в цель) найти: I) распределение вероятностей; 2) функцию распределения и построить ее график; 3) вероятность попадания случайной величины в интервал $]\alpha,\beta[$; 4) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

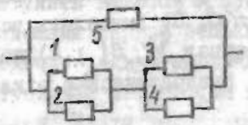
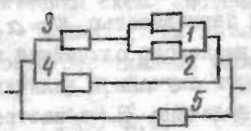
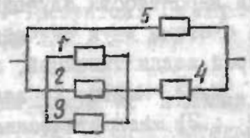
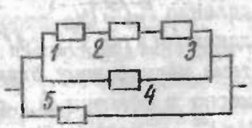
Задача 7. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f(x)$. Требуется: I) найти ее функцию распределения $F(x)$; 2) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$; 3) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $]\alpha,\beta[$; 4) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

Задача 8. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины ξ. Случайная величина η связана со случайной величиной ξ функциональной зависимостью $\eta=a\xi^2+b$. Найти: I) математическое ожидание и дисперсию случайной величины η, используя плотность вероятности случайной величины ξ; 2) плотность вероятности случайной величины η и построить ее график; 3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины η, используя найденную плотность вероятности случайной величины η.

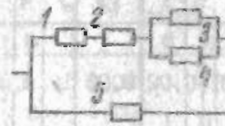
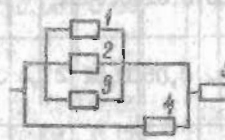
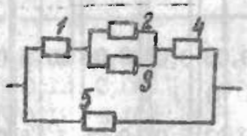
Задача 9. Дана система двух случайных величин (ξ,η), закон распределения которой задан таблицей, где $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $y_1=-1$, $y_2=0$, $y_3=1$, $y_4=2$. Найти: I) законы распределения случайных величин ξ и η; 2) математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η; 3) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; 4) условные распределения $P_1(x_i|y_2)$, $P_2(y_j|x_2)$; 5) условные математические ожидания $M(\xi|y_2)$, $M(\eta|x_2)$.

Задача IO. Система непрерывных случайных величин $(\eta;\xi)$ распределена равномерно в области D, ограниченной линиями $x=a$, $y=b$, $y=\beta|x|^{\alpha}$. Найти: I) совместную плотность распределения $f(x,y)$, предварительно построив область D; 2) плотности вероятности случайных величин ξ и η; 3) математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η; 4) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; 5) условные плотности распределения $f_1(x|y)$ и $f_2(y|x)$; 6) условные математические ожидания $M(\xi|y)$ и $M(\eta|x)$, линии регрессии и построить их графики.

Задача II. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = a\xi + b\eta + c$, где (ξ, η) – система случайных величин из задачи I0.

№ варианта	Задача I		Задача 2			Задача 3	Задача 4			
	k	$[\alpha, \beta]$	T	t_1	t_2		n	k	m	ℓ
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
I	3	[4;6]	I00	5	5		I2	6	6	5
2	4	[2;5]	I00	5	I0		I2	6	6	4
3	5	[3;7]	I00	5	I5		I2	6	6	3
4	6	[2;6]	I00	5	20		I2	6	6	2
5	7	[3;5]	I00	5	25		I2	7	6	5

№1 №2 №3 Продолжение табл. №4

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
6	8	[3;4]	I00	I0	I0		I2	7	6	4
7	9	[3;8]	I00	I0	I5		I2	7	6	3
√ 8	I0	[4;7]	I00	I0	20		I2	7	6	2
9	2	[9;I2]	I00	I0	25		I2	7	6	I
I0	II	[8;I2]	I00	I0	30		I2	8	6	5

√ 1 2 3 4 5 6

1 2 3 4

Продолжение табл.

№ варианта	Задача 5: a, %	b, %	c, %	p_1	p_2	p_3	j	Задача 6: n	p	$]\alpha,\beta[$	Задача 7: $f(x)$	λ	$]\alpha,\beta[$
I	I0	30	60	0,0I	0,02	0,03	I	4	0,2	]-I;0,5[	Распределение Релея $f(x)=2\lambda^2 x e^{-\lambda^2 x^2},\ x>0$	3	]I;3[
2	30	I0	60	0,0I	0,04	0,03	2	4	0,3	]0,5;3[		2	$]\frac{I}{2};I[$
3	I0	60	30	0,02	0,04	0,03	3	4	0,4	]I,5;2,5[		I	]2;3[
4	30	60	I0	0,03	0,0I	0,05	I	4	0,5	]4,5;3[		4	$]\frac{I}{2};2[$
5	60	I0	30	0,02	0,05	0,0I	2	4	0,6	]0,5;2[		5	]I;2[
6	60	30	I0	0,0I	0,03	0,02	3	4	0,7	]I,3;2[	Распределение Парето $f(x)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\lambda+1},\ x>2$	7	]3;4[
7	20	35	45	0,0I	0,03	0,04	I	4	0,8	]2;3,5[		6	]4;5[
8	20	45	35	0,02	0,03	0,04	2	4	0,9	]I;3[		5	]4;8[
9	35	20	45	0,03	0,05	0,03	3	5	0,I	]0,5;4[		4	]3;5[
I0	35	45	20	0,02	0,0I	0,05	I	5	0,2	]-I;0,5[		3	]4;6[

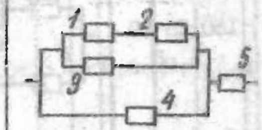
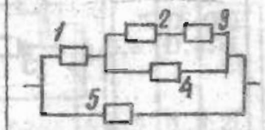
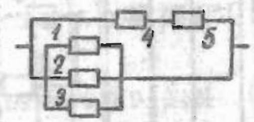
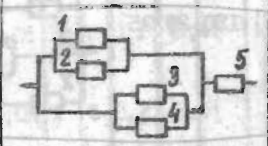
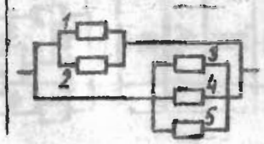
Продолжение табл.

№ варианта	Задача 8: $f(x)$	a	b		Задача 9: x_1	x_2	x_3	Задача I0 ($x>0$): a	b	α	β	Задача II: a	b	c
I	2	3	4		5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
I	$\begin{cases} \frac{1}{2}x, & x\in\,]0;2[\\ 0, & x\notin\,]0;2[\end{cases}$	I	0	y_1 y_2 y_3 y_4	0,05 0,08 0,I2 0,I0	0,I0 0 0 0,I8	0,04 0,06 0,I5 0,I2	I	0	I	2	2	-7	I
2		I	I		0 0 0,I8 0,I0	0,06 0,I5 0,I2 0,04	0,I2 0,I0 0,05 0,08	I	0	2	2	2	-6	-I
3		2	0		0 0,I8 0,I0 0	0,I5 0,I2 0,04 0,06	0,I0 0,05 0,08 0,I2	I	0	$\frac{I}{2}$	2	2	-5	2
4		I	2		0 0,06 0,05 0,I0	0,I8 0,I5 0,08 0,I0	0,04 0,I2 0,I2 0	I	0	3	2	2	-4	-2
5		2	I		0,I8 0,I5 0,08 0,I0	0,04 0,I2 0,I2 0	0,06 0,05 0,I0 0	I	0	I	-2	2	-3	3

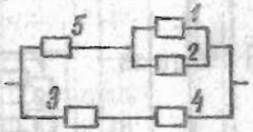
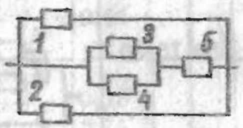
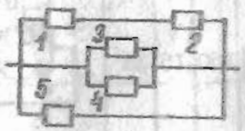
Продолжение табл. a b c

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
6	$\begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \in]0;2[\\ 0, & x \notin]0;2[\end{cases}$	2	2	0,05 0,I2 0,I0 0	0,04 0,I5 0,08 0,I0	0 0,I8 0,06 0,I2	I	0	2	-2	-2	7	-3
7		2	3	0,05 0 0,08 0,I8	0,I2 0,04 0,I0 0,06	0,I0 0,I5 0 0,I2	I	0	$\frac{I}{2}$	-2	-2	6	4
8		3	0	0 0,I0 0,I8 0	0,I5 0,04 0,I2 0,06	0,I0 0,08 0,05 0,I2	I	0	3	-2	-2	5	-4
9		3	-I	0,04 0,I2 0,06 0,I0	0,08 0,05 0,I2 0	0,I0 0,I8 0 0,I5	0	2	I	2	-2	4	5
I0		3	-2	0 0,I0 0,I2 0,I0	0 0,06 0,04 0,05	0,I8 0,I5 0,I2 0,08	0	2	2	2	-2	3	-5

Продолжение табл.

№ вари-анта	Задача I		Задача 2			Задача 3	Задача 4			
	k	$[\alpha, \beta]$	T	t_1	t_2		n	k	m	l
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
II	4	[4;I0]	I50	I5	I5		I2	8	6	4
I2	5	[2;8]	I50	I5	20		I2	8	6	3
I3	6	[5;I7]	I50	I5	25		I2	8	6	2
I4	7	[8;I2]	I50	I5	30		I2	9	6	5
I5	8	[I0;I3]	I50	I5	35		I2	9	6	4

Продолжение табл.

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
I6	9	[20; 28]	I50	20	20		I2	I0	6	4
I7	I0	[30; 35]	I50	20	25		I2	6	5	4
I8	II	[2I; 26]	I50	20	30		I2	6	5	3
I9	I2	[I5; I8]	I50	20	35		I2	6	5	2
20	I3	[20; 23]	I50	20	40		I2	7	5	4

1 2 3 4

Продолжение табл.

№ варианта	Задача 5							Задача 6			Задача 7		
	a, %	b, %	c, %	P_1	P_2	P_3	j	n	P	$]\alpha,\beta[$	$f(x)$	λ	$]\alpha,\beta[$
II	45	20	35	0,02	0,03	0,0I	2	5	0,3	]0,5;3[	Гамма – распределение $f(x)=\frac{1}{2}\lambda^3x^2e^{-\lambda x}$, $x>0$	4	]I,2[
I2	45	35	20	0,03	0,0I	0,04	3	5	0,4	]0,5;2,5[		3	]2;3[
I3	25	40	35	0,03	0,04	0,02	I	5	0,5	]I,5;3[		2	]I;3[
I4	25	35	40	0,05	0,0I	0,03	2	5	0,6	]0,5;2[		I	]3;4[
I5	40	35	25	0,05	0,0I	0,02	3	5	0,7	]I,3;2[		5	]2;4[
I6	40	25	35	0,02	0,0I	0,03	I	5	0,8	]2;3,5[	Экспоненциальное распределение $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$	3	]I;3[
I7	35	40	25	0,03	0,0I	0,02	2	5	0,9	]I;3[		4	]3;5[
I8	35	25	40	0,03	0,04	0,0I	3	6	0,I	]3;4[		I	]3;4[
I9	40	I5	45	0,03	0,02	0,04	I	6	0,2	]2;6[		5	]I;2[
20	40	45	I5	0,05	0,03	0,0I	2	6	0,3	]I,5;4[		2	]2;5[

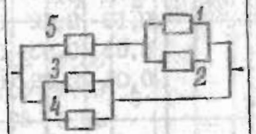
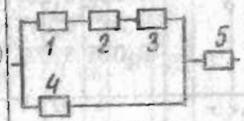
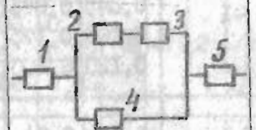
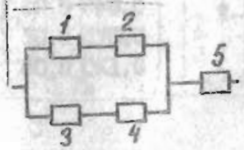
Продолжение табл.

№ варианта	Задача 8			Задача 9			Задача 10				Задача II		
	$f(x)$	a	b	x_1	x_2	x_3	a	b	α	β	a	b	c
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
II	$\begin{cases} \frac{1}{2}, x\in]-1;1[\\ 0, x\notin]-1;1[\end{cases}$	I	0	y_1 0,04 y_2 0,06 y_3 0,02 y_4 0,08	0,I0 0,I5 0,05 0,20	0,06 0,09 0,03 0,I2	0	2	$\frac{I}{2}$ $x>0$	2	3	-6	6
I2		I	I	0,I5 0,05 0,I0 0,20	0,06 0,02 0,04 0,08	0,09 0,03 0,06 0,I2	0	2	3 $x>0$	2	3	-5	-6
I3		I	2	0,075 0,075 0,06 0,09	0,075 0,075 0,06 0,09	0,I0 0,I0 0,08 0,I2	0	-2	I $x>0$	-2	3	-4	7
I4		2	0	0,06 0,06 0,04 0,04	0,06 0,06 0,04 0,04	0,I8 0,I8 0,I2 0,I2	0	-2	2 $x>0$	-2	3	-3	-7
I5		2	I	0,03 0,04 0,0I 0,02	0,09 0,I2 0,03 0,06	0,I8 0,24 0,06 0,I2	0	-2	$\frac{I}{2}$ $x>0$	-2	3	-2	8

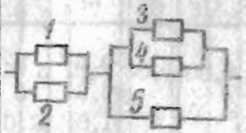
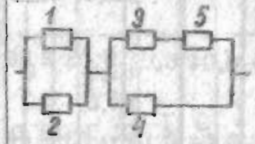
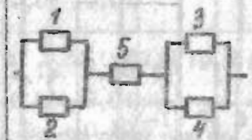
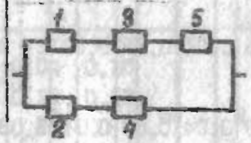
Продолжение табл.

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
I6	$\begin{cases} \frac{1}{2}, x\in]-1;1[\\ 0, x\notin]-1;1[\end{cases}$	2	2	0,09 0,I2 0,03 0,06	0,09 0,I2 0,03 0,06	0,I2 0,I6 0,04 0,08	-I	0	I	2 $x<0$	-3	6	-8
I7		2	3	0,0I5 0,035 0,025 0,025	0,045 0,I05 0,075 0,075	0,09 0,2I 0,I5 0,I5	-I	0	2	2 $x<0$	-3	5	7
I8		3	0	0,02 0,03 0,07 0,08	0,07 0,I05 0,245 0,28	0,0I0 0,0I5 0,035 0,040	-I	0	$\frac{I}{2}$	2 $x<0$	-3	4	-7
I9		3	-I	0,030 0,045 0,I05 0,I20	0,050 0,075 0,I75 0,200	0,02 0,03 0,07 0,08	-I	0	3	2 $x<0$	-3	3	6
20		3	-2	0,06 0,045 0,075 0,I20	0,04 0,03 0,05 0,08	0,I00 0,075 0,I25 0,200	-I	0	I	-2 $x<0$	-3	2	-6
	8			9			10				11		

Продолжение табл.

№ варианта	Задача I		Задача 2			Задача 3	Задача 4			
	k	$[\alpha;\beta]$	T	t_1	t_2		n	k	m	l
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
2I	I4	[I9;24]	200	25	25		I2	7	5	3
22	I5	[24;28]	200	25	30		I2	7	5	2
23	I6	[28;3I]	200	25	35		I2	7	5	I
24	I7	[2I;36]	200	25	40		I2	8	5	4
25	I8	[I7;22]	200	25	45		I2	8	5	3

Продолжение табл.

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
26	I9	[I5;I9]	200	30	30		I2	8	5	2
27	20	[22;28]	200	30	35		I2	8	5	I
28	2I	[I0;I5]	200	30	40		I2	9	5	4
29	24	[I2;I8]	200	30	45		I2	9	5	3
30	25	[3;8]	200	30	50		I2	9	5	2

Продолжение табл.

№ варианта	Задача 5							Задача 6			Задача 7		
	x_1, %	x_2, %	x_3, %	p_1	p_2	p_3	ν		p	$]\alpha,\beta[$	$f(x)$	λ	$]\alpha,\beta[$
2I	I5	40	45	0,05	0,02	0,0I	3	6	0,4	]I;6[	Распределение арксинуса $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda^2-x^2}}$, $-\lambda<x<\lambda$	4	]-2;2[
22	I5	45	40	0,03	0,02	0,01	I	6	0,5	]2;7[		2	]0;I[
23	45	I5	40	0,04	0,0I	0,03	2	6	0,6	]4;7[		3	]-I;I[
24	45	40	I5	0,04	0,02	0,03	3	6	0,7	]0,5;3[		5	]-3;0[
25	I0	55	35	0,0I	0,03	0,05	I	6	0,8	]I;4[		I	$]0;\frac{I}{2}[$
26	I0	35	55	0,04	0,03	0,02	2	6	0,9	]2;3[	Распределение Лапласа $f(x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\lvert x-a\rvert}$, $-\infty<x<+\infty$	3	]2;3[
27	55	I0	35	0,0I	0,05	0,03	3	3	0,I	]0;2[		5	]I;3[
28	55	35	I0	0,04	0,03	0,025	I	3	0,2	]0,5;2[		I	]I;2[
29	35	I0	55	0,0I	0,05	0,02	2	3	0,3	]-I;I,5[		4	]2;3[
30	35	55	I0	0,04	0,03	0,025	3	3	0,5	]2;4[		2	$]\frac{I}{2};I[$

Продолжение табл.

№ варианта	Задача 8			Задача 9			Задача I0 ($x<0$)				Задача II		
	$f(x)$	a	b	x_1	x_2	x_3	a	b	α	β	a	b	c
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
2I		I	0	y_1 0,I2 y_2 0,I0 y_3 0,I8 y_4 0,08	0 0 0,I5 0,I0	0,04 0,06 0,I2 0,05	-I	0	2	-2	4	-5	5
22		I	I	0,05 0,08 0,I2 0,I0	0 0 0,I8 0,06	0,I5 0,I2 0,I0 0,04	-I	0	$\frac{I}{2}$	-2	4	-4	-5
23		I	2	0 0,I8 0,06 0,I2	0,I2 0,05 0 0,I0	0,I5 0,04 0,I0 0,08	-I	0	3	-2	4	-3	4
24		2	0	0,08 0,04 0,I0 0,05	0,I2 0,I8 0,I0 0,I5	0 0,I2 0,06 0	0	2	I	2	4	-2	-4
25		2	I	0,08 0,05 0,I0 0,I2	0,04 0,I2 0,I5 0,06	0,I0 0,I8 0 0	0	2	2	2	4	-I	3

Продолжение табл.

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
26		I	-I	0,I0 0 0 0,06	0,I8 0,I2 0,I5 0,I0	0,04 0,08 0,05 0,I2	0	2	$\frac{I}{2}$	2	-4	5	-3
27		2	-I	0,I8 0,I2 0,I5 0,I0	0,04 0,08 0,05 0,I2	0 0 0,06 0,I0	0	2	3	2	-4	4	2
28		2	-2	0,05 0,04 0,06 0,I5	0,I2 0,08 0,I2 0,I0	0,I0 0 0 0,I8	0	-2	I	-2	-4	3	-2
29		-2	I	0 0,05 0,I0 0,04	0,I0 0,I8 0,I0 0,I5	0 0,08 0,06 0,I2	0	-2	2	-2	-4	2	I
30		-2	-2	0,I0 0 0,I2 0,06	0 0,I8 0,I0 0,I2	0,05 0,I8 0,04 0,I5	0	-2	$\frac{I}{2}$	-2	-4	I	-I

Содержание

Редакция заказной литературы

Геннадий Дмитриевич Карташов

Теория вероятностей. (Вероятностные модели.) Ч.I

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская
Редактор Е.С.Ивашкина
Корректор О.В.Калашникова

Подписано в печать 23.11.90. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 2.
Печ.л.4,0. Усл.печ.л.3,72. Уч.-изд.л.3,68. Тираж 300 экз.
Изд. № 260. Заказ № 1252. Цена 20 коп.
Издательство МГТУ, типография МГТУ.
107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.