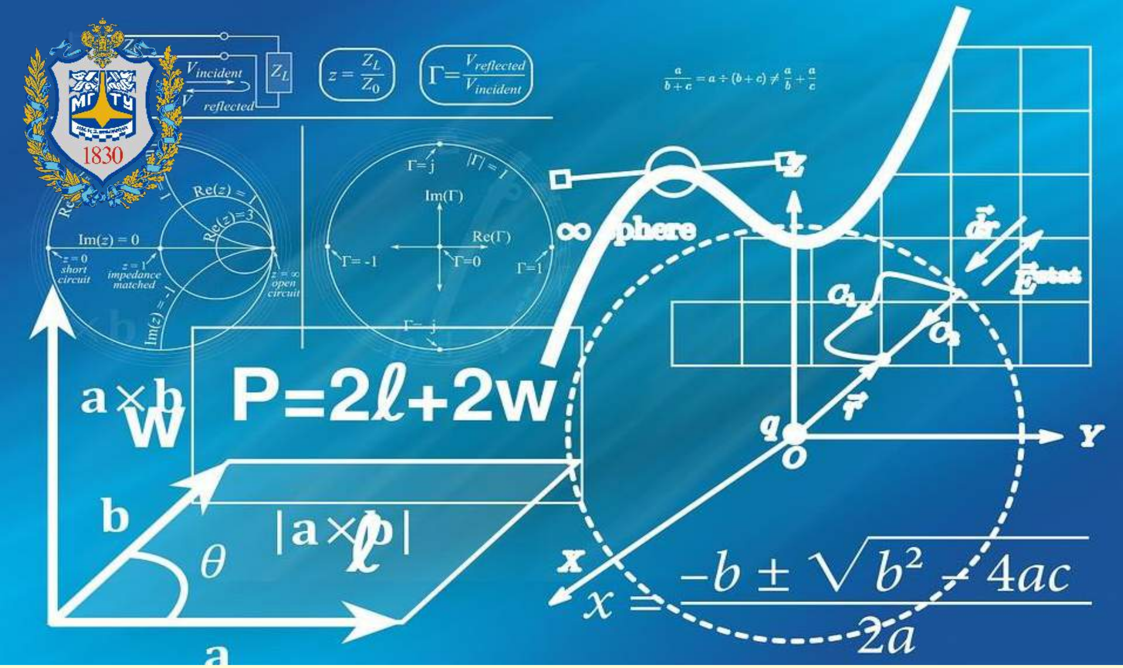


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА – НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

НАУЧНО – УЧЕБНЫЙ КОМПЛЕКС«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ»

КАФЕДРА ФН-1
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

НАПРАВЛЕНИЕ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Математическое моделирование является одним из наиболее перспективных научных направлений, обеспечивающих прогресс в различных отраслях техники. Оно опирается на достижения физики, механики, химии и других фундаментальных наук; облекает их в строгую форму математических моделей, которые служат основой для проведения вычислительных экспериментов современными компьютерными средствами. Триада «модель-алгоритм-программа» является инструментом, позволяющим достаточно быстро и достоверно получить необходимый объем информации об объекте исследования.

Известно много ярких примеров, когда посредством математического моделирования удавалось найти решение (часто совершенно неожиданное) сложнейших научных и технических проблем, обеспечившее прорыв в развитии не только технических отраслей, но и таких, казалось бы, далеких отточных наук дисциплинах, как биология, экономика и даже филология. Математическое моделирование оказалось универсальным средством проведения научных исследований и технических разработок: от создания ракетно- космических комплексов, концентрирующих в себе самые передовые достижения науки и техники, до расшифровки генетического кода, записанного в молекулах нуклеиновых кислот.

Направление подготовки «Прикладная математика» объединяет в себе не только приобретение вполне конкретных профессиональных знаний, навыков и умений, необходимых для успешного участия в наукоемких исследованиях и разработках, но и получение фундаментального образования, которое открывает перед выпускником пути дальнейшего совершенствования в самых различных направлениях и областях науки и техники. Такое сочетание дает бакалаврам и магистрам направления подготовки «Прикладная математика» возможность лучше адаптироваться к меняющейся и трудно

прогнозируемой ситуации в производственной и научной сферах, в экономике в целом.

Телефон кафедры ФН-1:
(499) 263-66-40

Кафедра высшей математики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана является ведущим учебным центром по подготовке кадров в области фундаментальных исследований по прикладной математике, вычислительной математике и информатике.

Кафедра была основана в 1868 году. Самим фактом своего создания, выработкой структуры и основных направлений научной деятельности кафедра обязана многим крупнейшим ученым. За прошедшие годы на кафедре сформировались ведущие в России научные школы по различным фундаментальным направлениям прикладной математики и информатики. Математизация является характерной чертой современной науки и техники. Математика дает современным специалистам мощные методы исследования как теоретических, так и чисто практических проблем. С помощью математики решается много важных и актуальных технических и экономических задач, имеющих первостепенное значение для прогресса страны, что превратило математику в производительную силу общества.

В настоящее время на кафедре «Высшая математика» работают 16 профессоров, 32 доцента, 9 старших преподавателей, 8 ассистентов. Среди преподавателей кафедры выпускники МГУ им. М. ВЛомоносова (механико-математического, физического факультетов, факультета вычислительной математики и кибернетики), МФТИ, МГТУ им Н.Э. Баумана, физико-математических факультетов других университетов.

Кафедра готовит специалистов по направлениям общей математики, динамических систем и процессов управления, математической физики, вычислительных методов, функционального анализа и его применений, исследования операций, оптимального управления, теории вероятностей и математической статистики, основы математической теории надежности, теория оптимальных статистических решений, испытание технических систем, статистический анализ данных по цензурированным выборкам, многомерный статистический анализ, марковские модели систем с взаимодействием, методы выборочного обследования, вейвлеты и атомарные функции цифровой

Заведующий кафедрой ФН-1 «Высшая математика»

СИДНЯЕВ
Николай Иванович

д.т.н., профессор

обработки сигнала, теория массового обслуживания, теория планирования эксперимента, теория меры и ее приложение к теории случайных процессов, обобщенные функции и линейные операторы.

Подготовка магистров и бакалавров на кафедре осуществляется по образовательным программам по специальности «Прикладная математика». Подготовка на кафедре «Высшая математкиа» специалистов ведется традиционными методами, показавшими свою эффективность. Упор в подготовке специалистов делается на подготовку специалистов исследователей. Целью является подготовка кадров, способных к успешному функционированию в новых экономических и политическихусловиях и готовых к решению задач, связанных с использованием наукоемких информационных технологий в смежных областях человеческого знания и деятельности, в том числе при разработке интегрированных систем информационного и математического обеспечения технической, информационной и административной деятельности. Предполагается подготовка специалистов международного класса, обладающих развитым системным мышлением.

Обучение по программам кафедры предполагает подготовку профессионалов для видов деятельности, требующих глубокой фундаментальной подготовки, включая создание и использование новых информационных технологий, реализованных в виде систем, продуктов и сервисов; разработку и применение математических моделей процессов и объектов, современных математических методов и технологий для решения задач науки, техники, экономики и управления; использование информационных технологий в проектно-конструкторской и управленческой деятельности.

Учебным планом для студентов, обучающихся на кафедре Высшая математика, предусмотрена фундаментальная математическая подготовка. Студенты изучают

НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Дифференциальные уравнения
Теория вероятностей, математическая статистика, математическая теория надежности
Исследование операций
Функциональный анализ и алгебра
Механика сплошной среды
Теория атомарных и R - функций, вейвлеты, фракталы

математический анализ, теорию функций комплексного переменного, функциональный анализ, линейную алгебру, аналитическую геометрию, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теорию вероятностей, математическую статистику, математическую логику, дискретную математику, нейроматематику, численные методы, исследование операций, теорию игр, оптимальное управление, экстремальные задачи.

Значительное место в подготовке специалистов занимает практическая работа на компьютерах, включая рабочие станции и персональные компьютеры. На первых двух курсах обучение ведется по общим учебным планам и программам. Основное внимание уделяется общематематической подготовке. Важно отметить, что с появлением новых возможностей использовании математики, связанных с современной вычислительной техникой, не потеряли своего значения и методы классической математики, в частности теоретические математические исследования.

Начиная с 4 курса, студенты проходят специализацию на выбранных ими кафедрах. Каждый студент работает в спецсеминаре и имеет своего научного руководителя.

Все студенты изучают английский язык и цикл гуманитарных дисциплин. Выпускники кафедры, проявившие склонность к научно-исследовательской работе, могут продолжить обучение в аспирантуре факультета со сроком обучения 3 года. Выпускники отделения бакалавров, так же как и выпускники других вузов, могут продолжить обучение в магистратуре факультета. Прием в магистратуру осуществляется на конкурсной основе.

Студенты обязательно привлекаются к научным исследованиям, проводимым на кафедре, в академических институтах или в научных лабораториях. На кафедре созданы секции: математической физики, моделирования процессов тепло-массопереноса, статистического моделирования, математического моделирования в экономике, вычислительной гидродинамики, обратных задач, математического

Полуогружная буровая установка DeepSeaDelta на Штокмановском месторождении в Баренцевом море

моделирования в физике, разностных методов, статистического анализа, вычислительного практикума и информационных систем в образовании и научных исследованиях.

Кафедра имеет тесные рабочие контакты с крупными Российскими компаниями, такими как ОАО «Газпром», РОСАТОМ, ОАО РЖД и зарубежными фирмами. Совместно с институтами Российской Академии наук и организациями на кафедре создан научно-образовательный центр (НОЦ) математического моделирования.

Выпускники кафедры работают во всех сферах, где используется прикладная математика вычислительная техника: академические и научно-исследовательские институты, высшие учебные заведения, государственные и правительственные учреждения, банки, страховые, финансовые, консалтинговые фирмы, российские и иностранные фирмы и т. д. Многие из выпускников продолжают обучение в аспирантуре. Сочетание глубокой теоретической подготовки сактивной практической и научно-исследовательской

РЛС «Дон»

работой под руководством преподавателей и научных сотрудников делает выпускников кафедры конкурентоспособными на рынке труда.

Кафедра плотно сотрудничает с коллективами исследователей Институтом высоких температур РАН, ИПТМ РАН, Вычислительным центром РАН имени АА Дородницына, Института Криосферы Земли СО РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова, Институтом Океанологии им. Ширшова, МФТИ и др.

Инструментарий инженера

Для геометра математика сама по себе есть *конечная цель,* для инженера — это есть *средство,* это есть инструмент такой же, как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря или полусаженок, топор и пила для плотника.

Инженер должен по своей специальности уметь владеть своим инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать; плотник не должен уметь выковать или наварить топор, но должен уметь отличить хороший топор от плохого; слесарь не должен уметь сам насекать напильник, но должен выбрать тот напильник, который ему надо.

Так вот, геометра, который создаёт новые математические выводы, можно уподобить некоему воображаемому универсальному инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу; он делает всё, начиная от кувалды и кончая тончайшим микроскопом и точнейшим хронометром. Геометр создаёт методы решения вопросов, не только возникающих вследствие современных надобностей, но и для будущих, которые возникнут, может быть, завтра, может быть, через тысячу лет.

Вообразите же теперь инженера, вошедшего в этот склад и желающего в нём найти нужный ему инструмент. Он прежде всего будет поражён подавляющим количеством всего накопленного за 2500 лет материала, его изумительным разнообразием. При более внимательном рассмотрении он заметит среди массы других вещей, кажущихся простыми, и некоторые сложнейшие аппараты непонятного ему назначения, но изумительные по отделке их многочисленных деталей, по тщательной их пригонке, да к тому же оправленные в серебро и золото.

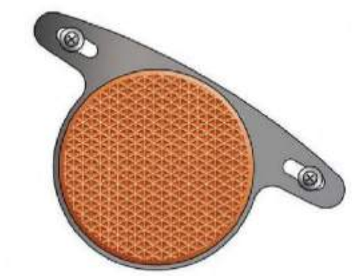
Но ведь инженер пришёл сюда не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами: не золото и серебро ему нужны, а быстрорежущая сталь, ему нужен не столько шабер, сколько грубая обдирка, грубое надёжное зубило, ведь не шабером же будет он выбирать шпунт у ахтерштевня. Присмотревшись ещё ближе, он среди этого бесчисленного разнообразия заметит ряд, видимо,издавна систематически подобранных ассортиментов, остающихся почти неизменными в течение 150 лет, к тому же кладовщик ему подскажет, что их так часто требуют, что и не напасёшься, а за остальным заходят лишь знатоки — мастера и любители.

Не отнестись ли ему с доверием к этим ещё издавна великими мастерами подобранным ассортиментам и не следует ли ему воспользоваться этими готовыми и десятилетиями, если не столетиями, испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть, а затем уже, когда он сам станет знатоком и мастером, порыться и в остальных сокровищах и попытаться извлечь из них именно то, что ему надо, не брезгуя и шаберами.

Так вот, эти систематические ассортименты — это те курсы, которые вам читают, и те руководства, изучение которых вам рекомендуют, а кладовщики и инструментальщики — это те профессора и руководители, которые вас обучают. Может быть, они сами и не инженеры, но зато они хорошо знают и хорошо владеют вверенным им инструментом, склад свой они изучили и знают, где и что в нём можно найти. Далее мы вам предлагаем с согласия авторов сюжеты, собранные в этом рекламном буклете из книги Математическая составляющая/Редакторы-составители Н.Н.Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюхин; Художник-оформитель Р.А. Кошкаров.-М.: Фонд «Математические этюды», 2015.-151с.

Уголковый отражатель

Катафот известен всем с детства — его устанавливают на спицах колёс велосипеда.



Катафоты играют важную роль в повышении безопасности дорожного движения. В отличие от фар, катафот не требует энергии и не содержит лампочек. Но если его закрепить на велосипеде,мотоцикле, автомобиле, если превратить в катафот с помощью специального покрытия даже небольшую часть куртки пешехода или поверхность дорожного знака,—во всех этих случаях водитель машины, фары которой осветили один из перечисленных объектов, сразу его заметит из-за отражения света фар от катафота.

Простейшая разновидность катафота — уголковый отражатель, именно его мы видим на велосипедах и автомобилях. Для объяснения принципов работы уголкового отражателя достаточно школьных знаний из оптики и геометрии.

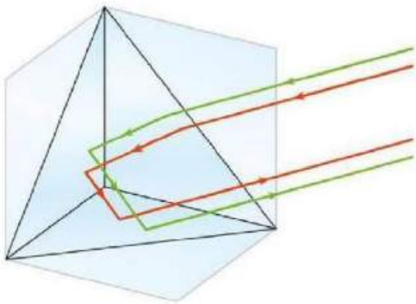
Возьмём в плоскости два перпендикулярных «зеркальных» отрезка, от которых луч отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Отразившись последовательно от обоих зеркал, луч уйдёт в сторону источника параллельно исходному лучу. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно вспомнить и применить два геометрических факта: 1) сумма углов в треугольнике равна 180°, 2) признак параллельности прямых (сумма внутренних односторонних углов при секущей равна треугольнике равна 180°).

Чтобы получить такой эффект в нашем (трёхмерном) пространстве, нужно взять три взаимно перпендикулярных зеркала.

В этом случае «экономное» объяснение эффекта можно дать на языке векторов. Если направление исходного луча задаётся вектором с координатами(a,b,c), то после отражения луча от плоскости xOy его

направляющим вектором будет *(a,b,-c)*, а после последовательных отражений от плоскостей yOz и zOx —
$(-a,b,-c)$ и $(-a,-b,-c)$ соответственно. Конечно же, подобное объяснение можно привести и для плоского случая.

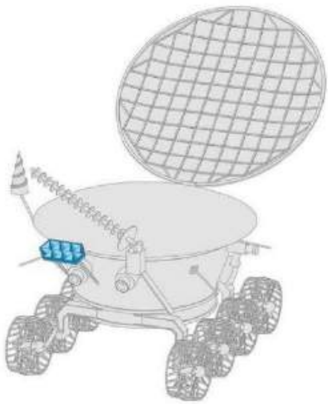
Катафот данного типа представляет собой множество уголков-ячеек, что обеспечивает увеличение «отражательной силы» устройства. Для создания ячеистого зеркала важно то, что равными (и в частности равносторонними) треугольниками можно замостить плоскость.



Вернёмся к автомобилям — свет включённых фар, отразившись от катафота, «вернётся» к водителю машины, сообщая ему об объекте, находящемся впереди.

Катафоты верно служат и в других средах, например, их можно встретить на морях и реках: они являются частью оснастки небольших яхт и плотов; буй, определяющий границы участков и водные пути, с закреплённым на нём катафотом, становится источником важных сигналов.

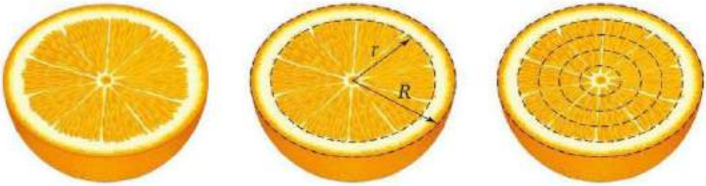
Ещё один пример — из истории освоения космоса. Для исследования Луны в Советском Союзе была разработана серия аппаратов «Луноход». Первый аппарат «Луноход-1» был доставлен на поверхность Луны 17 ноября 1970 года, «Луноход-2» — в январе 1973 года. На обоих луноходах были установлены уголковые отражатели.



Эти отражатели, а также отражатели американской программы «Аполлон» позволяют с большой точностью измерять постоянно меняющееся расстояние от Земли до Луны. А эта характеристика «межпланетных отношений» важна и в чисто земной жизни, например, в учёте влияния приливов и отливов, и в чисто космической, например, при расчёте траекторий космических аппаратов.

Объём шкурки апельсина

Вы купили апельсин и разрезали его пополам. Можно ли, глядя на половинку апельсина, определить, чего в ней больше — кожуры или мякоти?



Вопрос кажется странным, ведь кожура — это тонкий слой, край апельсина (будем считать, что апельсин имеет форму шара). Оказывается, что относительно тонкий слой на границе шара имеет тот же объём, что и вся остальная часть. Например, у апельсина диаметром 10 см с кожурой толщиной 1 см почти половина всего объёма сосредоточена в кожуре!

Давайте проверим. Рассмотрим два шара радиусов R и r $(r < R)$. Каким должен быть радиус меньшего шара, чтобы его объём составлял половину объёма большого?

Объём шара радиуса R равен $V_R = \frac{4}{3}\pi R^3$. Для нахождения r запишем уравнение

$$V_r = V_R - V_r, \text{ или } \frac{4}{3}\pi r^3 = V_R = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Из него следует что $R^3 = 2r^3$, т. е.

$$r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,79R \approx \frac{4}{5}R.$$

Таким образом, почти половина объёма шара сосредоточена в слоеоколо поверхности толщиной всего лишь $1/5$ радиуса.

В представленном на рисунке апельсине кожуры и мякоти поровну.

Поясним читателю выбор формы уравнения: вместо $V_r = V_R - V_r$ естественного $V_R = 2V_r$.Это сделано, чтобы напомнить одну идею, часто встречающуюся в геометрии и полезную при решении житейских задач, — фигура, для площади или объёма которой нет готовой формулы, представляется как разность «известных» фигур.

Конический фужер

Как уговорить ребёнка выпить злую микстуру? Можно пойти на «математическую» хитрость, и если она сработает, то в дополнение к порции лекарства ребёнок получит поучительное объяснение.

Нальём микстуру в конический бокал и предложим «больному» выпить половину («среднее дипломатическое» для уговаривающего и сопротивляющегося). Большинство автоматически решит, что«половина» — это «половина по высоте», и… выпьет $\frac{7}{8}$ содержимого бокала, т. е. почти всё!

А половина бокала будет выпита, если уровень жидкости понизится примерно на $\frac{1}{5}$ высоты (точнее, на $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$). Число $\sqrt[3]{2}$ V2 ужевстречалось на предыдущей странице, его появление здесь вызвано похожими соображениями, только формулу объёма шара заменит формула объёма конуса.

Перечисленные «подходы» к бокалу изображены на рисунках.

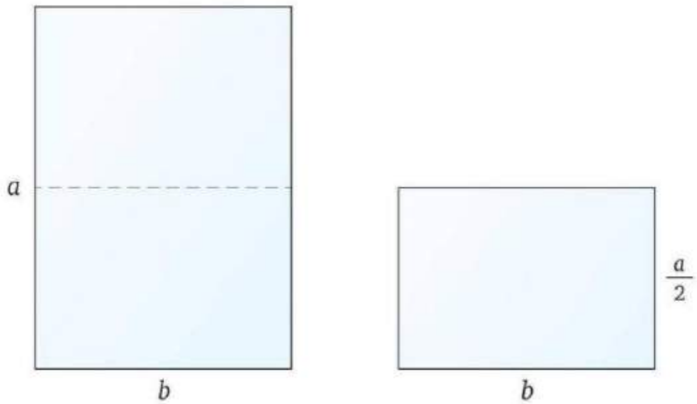
Несколько практических замечаний.

Приведённые соотношения действуют для любого конического фужера, так как не зависят от угла конуса.

В математике формулы, связи условий и утверждений в теоремах — часто вещи обратимые, их можно читать-применять и в одну сторону, и в другую. Так и в нашем примере: приведённые математические соображения позволяют разумно обосновать желание выпить больше, чем разрешают.

Формат А4

Каким должно быть отношение сторон прямоугольного листа бумаги, чтобы у половины этого листа было такое же отношение сторон?



Представим сформулированное условие в виде формулы:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}.$$

Отсюда находим отношение сторон:

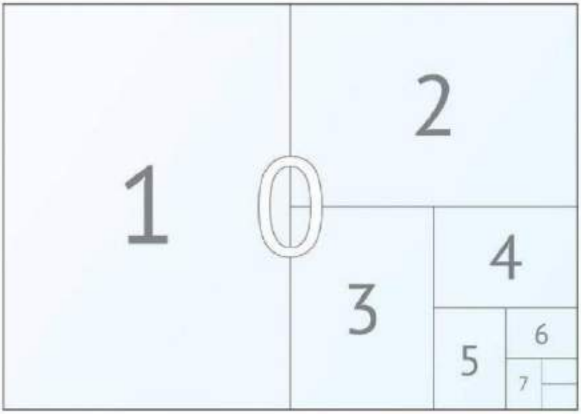
$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

У листа с таким отношением сторон имеется свойство, ценное и в делопроизводстве, и в полиграфии: сложив его пополам, мы получим лист с теми же пропорциями и, значит, также удовлетворяющий сформулированному требованию. С точки зрения геометрии, всё дело в том, что исходный прямоугольник и его половина подобны. А если листы подобны, то макет страницы, разработанный для одного из них, можно перенести на второй простым масштабированием.

Стандарты на бумажные форматы, удовлетворяющие сформулированному требованию, были введены в 20-х годах XX века. Применяются серии «A», «B», «C», каждая состоит из последовательности уменьшающихся листов. Выбор самого большого листа в серии («базового», получающего нулевой индекс), связан с той или иной нормировкой. В каждой серии лист с номером $n+1$выглядит как сложенный вдвое лист с номером n .

Число $\sqrt{2}$, которое теоретически определяет отношение сторон прямоугольных листов всех номеров во всех сериях, является иррациональным. Это означает, что число $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде отношения двух целых чисел, соответствующая ему десятичная дробь — бесконечная непериодическая

$$\sqrt{2} = 1,414213562373...$$



На практике приходится использовать рациональные числа. В выборе форматов серий «А», «В», «С» длины сторон листов выражаются целыми числами (в миллиметрах), эти числа подобраны так, чтобы их отношение было близким к $\sqrt{2}$.

В серии «А» в качестве листа АО взят лист, имеющий размеры 1189 х 841 мм. Размеры листа выбраны так, что его площадь (с большой точностью) равна одному квадратному метру. В повседневной жизни наиболее часто встречается формат бумаги А4. Длины сторон листа равны 297 и 210 мм, это примерно одна четвёртая часть длин сторон листа АО, площадь листа А4 — примерно 1/16 квадратного метра. При плотности стандартной офисной бумаги 80 грамм на квадратный метр, один лист весит около 5 грамм, а пачка из 500 листов — 2,5 килограмма.

В серии «В» лист ВО выбран так, что длина его меньшей стороны равна 1 метру. Чтобы отношение сторон было близко к $\sqrt{2}$, в качестве большей стороны листа принято значение 1,414 м. Область применения серии «В» — специальные разделы делопроизводства. Например, паспорт гражданина Российской Федерации имеет формат В7 — 125 х 88 мм, что соответствует рекомендациям, содержащимся в международном стандарте.

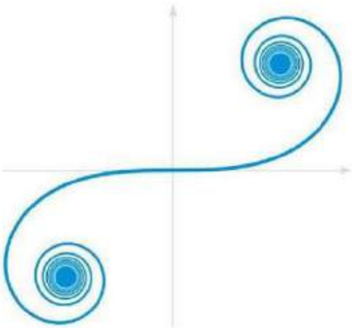
Кривая поворота

Прохождение поворота на трассе — демонстрация мастерства пилота в «Формуле-1». Но с этой задачей ежедневно сталкиваются и рядовые водители, и машинисты поездов. А можно ли проектировать дороги так, чтобы уменьшить «стрессы» на поворотах для водителей, пассажиров и даже для техники?

Очевидно, что дорога должна быть гладкой, без изломов. Но для скоростных трасс этого недостаточно.

Представим дорогу в виде прямой, переходящей в дугу окружности. На прямолинейном участке во время движения руль не повёрнут. При въезде на участок дуги окружности его необходимо резко повернуть. Пассажиры почувствуют толчок. Понятно, что описанный «толчок» при вхождении в такой поворот испытывает и техника. Но если водитель автомашины ещё может попытаться «сгладить» ситуацию за счёт выбора траектории, то машинист поезда такого выбора не имеет, и при неудачной геометрии полотна страдать будут все — от пассажиров до рельсов (последние будут быстро изнашиваться).

Итак, непосредственная склейка прямой и окружности в данной ситуации — решение не лучшее. Возникает задача расчёта переходной кривой — части дороги, осуществляющей «плавный» переход с прямолинейного участка на дугу окружности постоянного радиуса.



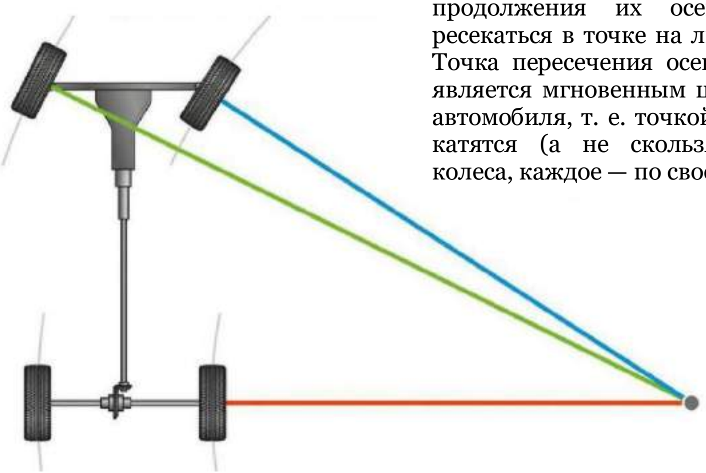
В математике у кривых есть важная характеристика — кривизна. У окружности радиуса R кривизна равна $1/R$, у прямой кривизна равна 0. Для произвольной гладкой кривой на плоскости кривизна в заданной точке определяется с помощью соприкасающейся окружности, дуга которой в окрестности точки «похожа» на дугу кривой.

Можно ли найти такую переходную кривую, чтобы её кривизна менялась линейно в зависимости от пройденного пути? Тогда при движении с постоянной (по модулю) скоростью руль автомобиля нужно было бы поворачивать равномерно.

Такие кривые существуют, они называются спиралями Корню или клотоидами. Для расчётов спирали Корню сложны, но в построении переходных кривых служат важной отправной точкой.

Поворот передних колёс автомобиля

Проскальзывание колёс автомобиля относительно дорожного полотна грозит потерей управления. Чтобы избежать этого, при повороте автомобиля углы поворота передних колёс в каждый моментдолжна быть согласованы - продолжения их осей должны пересекаться в точке на линии задней оси. Точка пересечения осевых линий колёс является мгновенным центром поворота автомобиля, т. е. точкой, вокруг которой катятся (а не скользят!) все четыре колеса, каждое — по своей окружности.



Первый механизм «согласования» поворотов передних колёс, основанный на использовании шарнирной равнобочной трапеции, придумал французский каретный мастер Шарль Жанто. Но его изобретение было забыто, поскольку с тягой в несколько лошадиных сил кареты двигались не быстро и проскальзывание колёс не было столь важным.

Лишь через три четверти века два отца автомобилестроения Готтлиб Даймлер и Карл Бенц, создавая свои автомобили, возвращаются к трапеции Жанто. В 1889 году Даймлер получает патент на «способ независимого управления передними колёсами с разновеликими радиусами поворота». А в 1893 году Бенц получает патент на «устройство управления экипажей с тангенциальными к колёсам окружностями управления». С тех пор трапеция «управляет» автомобилем.

Конечно, за это время техника усложнилась. У большинства современных машин колёса ходят по высоте относительно друг друга, поэтому для управления ими плоский шарнирный механизм (трапеция) уже не подходит. Однако и в наши дни механизм, поворачивающий передние колёса автомобиля, называется рулевой трапецией.

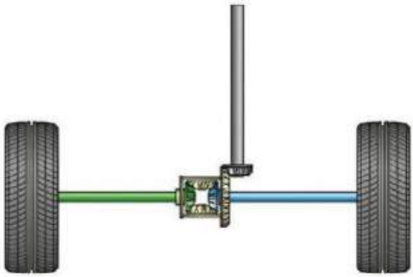
Современные конструкторы научились поворачивать и задние колёса автомобиля, эта возможность реализована в некоторых моделях. По сравнению с описанной классической схемой, у автомобиля с функцией согласованного поворота всех четырёх колёс существенно уменьшается минимальный радиус поворота.

Рассматривая поведение колёс автомобиля при повороте, нельзя не отметить ещё одну проблему геометрического толка.
При повороте колёса на одной оси катятся по дугам окружностей разных радиусов, поэтому должны отличаться и пройденные ими пути.

В изображённой на первом рисунке ситуации у автомобиля ведущая ось — задняя, передние колёса независимы и будут свободно крутиться, каждое со своей скоростью.

А вот задние колёса — колёса ведущей оси. Их обязанность — толкать автомобиль вперёд. И в то же время разность путей, пройденных ими при повороте, означает, что вращаться эти колёса должны с разными скоростями.

Сделать так, чтобы ведущие колёса могли подстраиваться под проходимый ими путь (как и их «свободные» коллеги— передние колёса), удаётся при помощи механизма, который называется дифференциал. Дифференциал, в полном соответствии со своим названием, раздаёт вращательное движение карданного вала на полуоси ведущей оси так, что они могут вращаться с разными скоростями!



Книги-панорамы

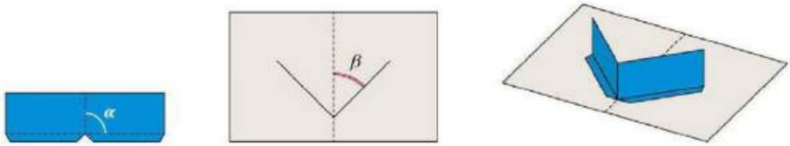
Детские книжки-панорамы с поднимающимися фигурами рыцарей и стенами замков, промопродукция компаний, притягивающая взрослых своей трёхмерной рекламной убедительностью — конструкции, основанные на эффекте PopUp(= внезапно подняться). Проектирование таких конструкций — по сути, геометрическая задача.

Книжки-панорамы обычно раскрываются полностью, на 180°. Наиболее популярная основа механизма PopUpв этом случае — прикреплённая к страницам разворота V-образная картонная конструкция, по-английски —V-fold, а с точки зрения геометрии — двугранный угол.

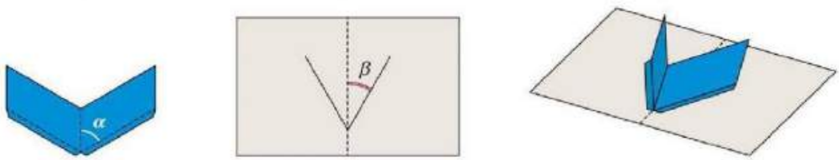
Для достижения различных эффектов иногда требуется, чтобы грани угла были перпендикулярны развороту, иногда — чтобы грани были наклонены внутрь или наружу конструкции. Определяют эти случаи два плоских угла: α — угол между ребром двугранного угла и линией приклейки, β — угол между сгибом книги и линией приклейки (будем считать, что β <90°, т. е. V-угол обращён ребром к нам).

Чтобы получить действующую конструкцию, соотношения между α и β должны быть следующими.

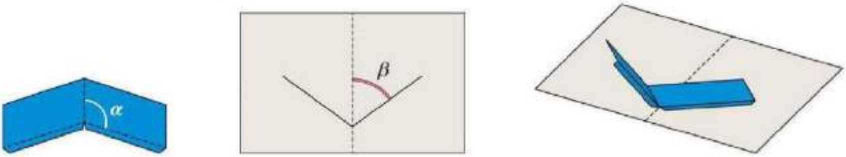
Грани двугранного угла перпендикулярны развороту: необходимо, чтобы выполнялись условия α =90°, β < 90°.



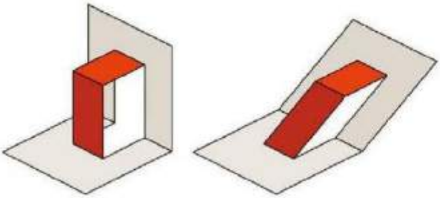
Грани и ребро двугранного угла отклоняются от нас: α <90°, β <90°, $\alpha \geq \beta$.. При фиксированном β уменьшение α увеличивает наклон ребра («от нас»). В пределе при $\alpha = \beta$ угол не будет подниматься, будет «лежачим». При фиксированном α уменьшение β уменьшает наклон ребра.



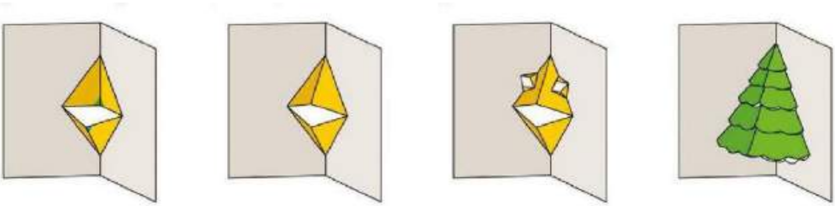
Грани и ребра наклонены к нам: α >90°, β <180°- α . При фиксированном α уменьшение β уменьшает наклон, ребро и грани приближаются к вертикальному положению.



Ещё один важный для конструкций PopUpмеханизм — «параллелограмм». Напомним, что у параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны. Особенность «параллелограмм»-конструкций — вырубаться они могут из «разворачивающегося» картона, а могут быть и внешними, приклеенными к нему, например, дополнять элементы V-fold.



Для открыток, которые раскрываются не полностью на 180°, а на меньший угол, обычно 90°, конструкцию PopUpчасто вырубают из картона самой открытки. Простейшая конструкция в данном случае — часть двугранного угла, состоящая из двух треугольников, определяемых своими сторонами (левый рисунок). При фиксированном неполном развороте открытки система квадратных уравнений, определяющая координаты подвижной вершины, имеет ровно два решения, которым соответствуют зелёная и синяя точки.



Типов простейших конструкций немного, но из них, как из «кирпичиков», можно создать весьма затейливые сооружения. Подобно архитектуре, многообразие форм возникает за счёт комбинирования и кирпичиков, и строительных приёмов. Так, можно включить в конструкцию PopUpнесколько однотипных элементов (пример — «ёлочка»), можно использовать цепочку однотипных элементов, в которой последующий элемент вырезается из предыдущего (пример — лесенка, сделанная на основе «параллелограмма»). Можно использовать и сложные композиции простейших элементов.

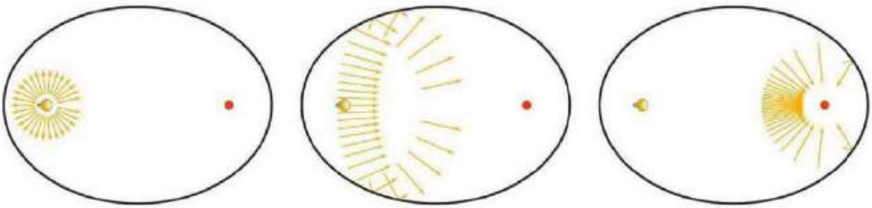
Дробление камней в почках

В организме человека как побочный результат происходящего в нём обмена веществ иногда образуются камни (например, в почках). Камни беспокоят, даже могут угрожать жизни, поэтому с ними приходится бороться.

Литотрипсия— один из методов дистанционного разрушения камней с помощью ударных волн. Принцип работы многих аппаратов дистанционного воздействия основан на геометрических свойствах эллипса.
Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна.

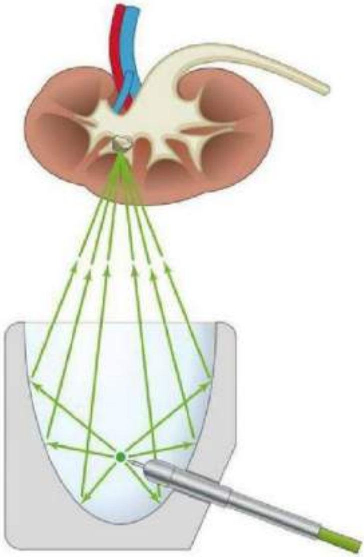
Это определение сразу приводит к способу построения эллипса. Привяжем концы нити к двум кнопкам, а их воткнём в лист бумаги. Если натянуть нить с помощью карандаша, поставить его на лист и, всё время сохраняя нить натянутой, провести линию, то получится дуга эллипса. Дело в том, что нить всё время будет иметь форму ломаной, состоящей из отрезков, соединяющих карандаш и кнопки-фокусы. Сумма длин этих отрезков постоянна и равна длине нити.

Как и парабола, эллипс обладает оптическим свойством. Если поместить точечный источник излучения («лампочку») в один из фокусов эллипса и включить его, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся во втором фокусе. При этом все лучи придут во второй фокус одновременно, так как для каждого луча длина пройденного пути будет одна и та же (по определению эллипса).



Именно это оптическое свойство эллипса используется в дистанционной литотрипсии.

При вращении эллипса вокруг прямой, проходящей через фокусы, получается эллипсоид вращения. В каждом сечении эллипсоида плоскостью, проходящей через ось вращения, получаются равные эллипсы с общими фокусами, поэтому эллипсоид тоже обладает оптическим свойством.



Отражатель аппарата дистанционной литотрипсии — часть эллипсоида, «чаша», примыкающая к одному из фокусов, в котором размещается источник излучения. Пациента помещают так, чтобы совместить положение второго фокуса и положение камня — мишени волновой атаки.

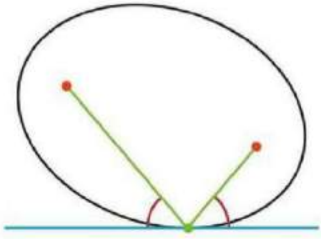
Конечно, излучение проходит и через ткани, окружающие камень, но только в фокусе одномоментно концентрируется вся энергия излучения, становясь и разрушающей, и целительной силой.

Приведём геометрическое объяснение оптического свойства эллипса.

Вышедший из фокуса луч, достигнув эллипса, отражается по закону «угол падения равен углу отражения» (отражение от кривой — это отражение от касательной к кривой в этой точке).

Если точку отражения луча соединить и со вторым фокусом, то получаются два отрезка нити из геометрического определения эллипса. На касательной к эллипсу, проведённой в точке отражения луча, все остальные точки лежат вне эллипса, поэтому для них сумма расстояний до фокусов будет больше. Воспользуемся теперь результатом фольклорной «задачи о Красной Шапочке», в которой внучка должна дойти от своего дома до реки (прямой), наполнить ведро и отнести его в дом бабушки. Кратчайший путь характеризуется тем, что отрезки, соединяющие дома с точкой «водозабора» на берегу, должны быть наклонены к прямой под одинаковыми углами.

В нашем случае дома — фокусы, река — касательная, кратчайший путь — отрезки нити,«рисующей» эллипс. Следовательно, эти отрезки образуют с касательной равные углы, а сама нить становится для луча «путеводной».



Расстояние до горизонта

Какова дальность до линии горизонта для наблюдателя, стоящего на земле? Ответ — приближённое расстояние до горизонта — можно найти с помощью теоремы Пифагора.

Для проведения приближённых расчётов сделаем допущение, что Земля имеет форму шара. Тогда стоящий вертикально человек будет продолжением земного радиуса, а линия взгляда, направленного на горизонт, — касательной к сфере (поверхности Земли). Так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания, то треугольник (центр Земли)—(точка касания)—(глаз наблюдателя) является прямоугольным.

Две стороны в нём известны. Длина одного из катетов (стороны, прилегающей к прямому углу) равна радиусу Земли R, а длина гипотенузы (стороны, лежащей против прямого угла) равна $R+h$, где h — расстояние от земли до глаз наблюдателя.

По теореме Пифагора, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Значит, расстояние до горизонта равно

$$d=\sqrt{(R+h)^2-R^2}=\sqrt{(R^2+2Rh+h^2)-R^2}=\sqrt{2Rh+h^2}.$$

Величина h^2 очень мала по сравнению со слагаемым $2Rh$,поэтому верно приближённое равенство

$$d=\sqrt{2Rh}.$$

Известно, что $R\approx 6400$ км, или $R\approx 64\cdot 10^5$ м. Будем считать, что $h\approx 1,6$ м. Тогда

$$d=\sqrt{2\cdot 64\cdot 10^5\cdot 1,6}=8\cdot 10^3\cdot\sqrt{0,32}.$$

Используя приближённое значение $\sqrt{0,32}\approx 0,566,$, находим

$$d=8\cdot 10^3\cdot 0,566=4528.$$

Полученный ответ — в метрах. Если перевести найденное приближённое расстояние от наблюдателя до горизонта в километры, то получим $d\approx 4,5$ км.

В дополнение — три микросюжета, связанных с рассмотренной задачей и проделанными вычислениями.

1. Как связано расстояние до горизонта с изменением высоты точки наблюдения? Формула $d=\sqrt{2Rh}$ даёт ответ: чтобы увеличить расстояние d вдвое, высоту h надо увеличить в четыре раза!

2. В формуле $d=\sqrt{2Rh}$ нам пришлось извлекать квадратный корень. Конечно, читатель может взять смартфон со встроенным калькулятором, но, во-первых, полезно задуматься, а как же решает эту задачу калькулятор, а во-вторых, стоит ощутить умственную свободу, независимость от «всезнающего» гаджета.

Существует алгоритм, сводящий извлечение корня к более простым операциями — сложению, умножению и делению чисел. Для извлечения корня из числа $a>0$ рассмотрим последовательность

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}),$$

где $n=0,1,2...,$ а в качестве x_0 можно взять любое положительное число. Последовательность $x_0,x_1,x_2,...$ очень быстро сходится к $\sqrt{a}.$

Например, при вычислении $\sqrt{0,32}$ можно взять $x_0=0,5.$. Тогда

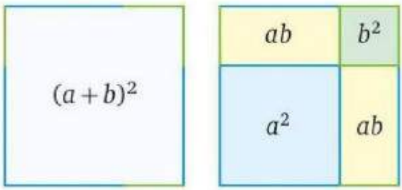
$$x_1=\frac{1}{2}(0,5+\frac{0,32}{0,5})=0,57,\ x_2=\frac{1}{2}(0,57+\frac{0,32}{0,5})\approx 0,5657.$$

Уже на втором шаге мы получили ответ, верный в третьем знаке после запятой $\sqrt{0,32}=0,56568...!$

3. Иногда алгебраические формулы удаётся столь наглядно представить как соотношения элементов геометрических фигур, что всё «доказательство» заключается в рисунке с подписью «Смотри!» (в стиле древних индийских математиков).

Объяснить геометрически можно и использованную формулу «сокращённого умножения» для квадрата суммы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Жан-Жак Руссо в «Исповеди» писал: «Когда я в первый раз обнаружил при помощи вычисления, что квадрат бинома равен сумме квадратов его членов и их удвоенному произведению, я, несмотря на правильность произведённого мною умножения, не хотел этому верить до тех пор, пока не начертил фигуры».

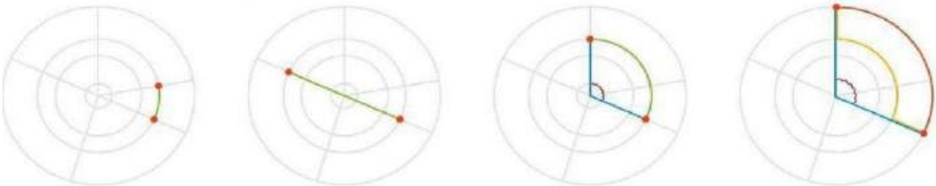


Кратчайший путь

Вы хотите прогуляться по Москве. Какой путь от станции метро «Маяковская» до станции «Курская» короче: по Садовому кольцу или через центр, через Красную площадь?

Рассмотрим математическую модель. Вы находитесь в городе с сетью радиальных и кольцевых дорог. Какой путь между точками, расположенными на одном кольце, является самым коротким?

Если точки достаточно близки друг к другу, то наиболее короткий путь — по кольцевой дороге. Если точки диаметрально противоположны друг другу, то наиболее короткий путь — по радиальным дорогам, поскольку кратчайшим путём между двумя точками является отрезок прямой.



По здравому смыслу (из соображений непрерывности) можно ожидать, что при некотором положении точек длина путей будет одинаковой. Это действительно так, если угол между радиусами равен 2 радианам (примерно 115 градусов). С хорошей точностью длина пути между указанными станциями метро по Садовому кольцу равна длине пути через Красную площадь.

В наших рассуждениях вывод не зависел от радиуса окружности, на которой находятся точки, что объясняется подобием круговых секторов с общим центром и одинаковым центральным углом. Например, если угол между радиусами двух точек на МКАД равен 2 радианам, то, выбирая автомобильный маршрут, можно просто поехать по кольцевой дороге, можно проехать по радиусам через центр, а можно и комбинировать — проехать по радиусу до Третьего транспортного кольца, потом — по дуге этого кольца до радиуса второй точки, затем вернуться по радиусу на МКАД. Длины всех рассмотренных маршрутов являются одинаковыми.

Складывание карт

Карты, схемы, путеводители обычно печатаются на больших прямоугольных листах бумаги. Для хранения и переноски эти листы складывают в несколько раз. Самый распространённый тип складывания — прямоугольный: лист разбивается на прямоугольники и складывается по линиям разбиения так, чтобы в сложенном виде у карты не было сгибов большой кратности (как у толстой пачки купюр, согнутой пополам).

При разворачивании карты или схемы проблем нет, но когда вы начинаете складывать карту, часто на каком-то этапе оказывается, что её придётся перегибать в направлении, противоположном тому, что сохранил в своей «памяти» лист.

А можно ли придумать такое разбиение листа карты и такой способ складывания, чтобы:

1. развёрнутая карта складывалась бы «сама» и не было необходимости запоминать порядок складывания;
2. у листа карты в сложенном виде не было сгибов большой кратности.

Сформулированную задачу можно решить, используя приёмы, разработанные японскими мастерами оригами.

Лист карты разбивается на полосы, состоящие из параллелограммов. Если начать складывать такой лист «гармошкой» по вертикали, конструкция автоматически начнёт складываться и по горизонтали. Форма возникшей складчатой поверхности в каждый момент складывания однозначно определяется одним параметром—расстоянием между диагонально противоположными углами карты.

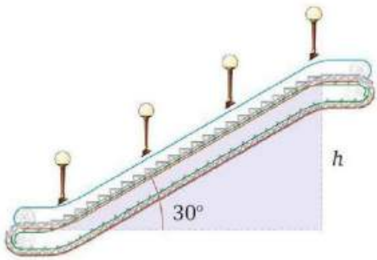
Приведённая конструкция замечательна ещё и тем, что параллелограммы могут быть жёсткими. Это открывает новые возможности для приложений. Например, так устроены солнечные батареи некоторых космических аппаратов.

Глубина заложения станций метрополитена

Как оценить глубину заложения станции метро, на которую вы спускаетесь по эскалатору?

Все российские эскалаторы, с самых первых моделей и до производимых в наше время, имеют угол наклона в 30 градусов.

Достроим мысленно эскалатор до естественного прямоугольного треугольника. Длина его гипотенузы — это длина эскалатора, а длина меньшего из катетов будет примерно равна глубине заложения той станции метро, на которую ведёт этот эскалатор.



Как посчитать длину эскалатора, спускаясь по нему? Можно засечь время, но тогда для вычисления пути нужно точно знать скорость движения, а она меняется в пределах от 0,75 м/с до 1 м/с (в зависимости от типа эскалатора).

Другой возможный способ решения— измерить длину эскалатора в ступеньках. Размеры одной ступеньки найти нетрудно. Но сосчитать число ступенек, находясь на движущемся полотне эскалатора, не так-то просто...

Что ещё можно придумать? Спускаясь или поднимаясь по эскалатору, мы проезжаем вдоль ряда ламп, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Нормативами задаётся освещённость тоннеля, исходя из которой устанавливается и расстояние между соседними лампами. Оно составляет примерно 5 метров, но его несложно измерить и самому.

Пусть s —расстояние между лампами, n —число ламп, тогда длина эскалатора равна $(n-1)s$, , так как число промежутков между лампами равно $n-1$.

Применив известные формулы из школьной математики, находим примерную глубину заложения

$$h=(n-1)s\cdot\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}(n-1)s.$$

Впрочем, эту формулу для h можно написать и не зная «синусов» — о том, что катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы, школьники узнают ещё до изучения тригонометрии.

Приняв s равным 5 метрам, получим простую для применения и легко запоминающуюся формулу для оценки глубины заложения станции метро.

Траектория полёта самолёта

Если проследить по карте маршрут полёта самолёта из Москвы в Петропавловск-Камчатский, то можно заметить, что во времяполёта самолёт забирается (по широте) высоко вверх. Кажется, что длина такого пути больше длины «прямого» пути, соединяющего на карте эти два города (координаты по широте близки: 55° 45' 21" с. ш. и 53° *V* с. ш.).

Странно, ведь лишние сотни километров пути самолёта — дорогое удовольствие. Но и сервис «Яндекс.Карты» на запрос о расстоянии между этими городами тоже выдаёт выпуклую вверх кривую.

Всё дело в том, что понятие кратчайшего расстояния неразрывно связано с той поверхностью, по которой оно измеряется. Любая плоская карта представляет земную поверхность с искажениями. А рассмотрение соответствующих траекторий на глобусе позволит во всём разобраться.

Чтобы найти кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере, необходимо провести через них большую окружность.

Так называют окружность, образованную пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и выбранные точки. Меньшая из двух дуг большой окружности, соединяющая точки, является кратчайшим расстоянием на сфере между ними. В математике линию, реализующую минимальное расстояние между двумя точками на рассматриваемой поверхности, называют геодезической.

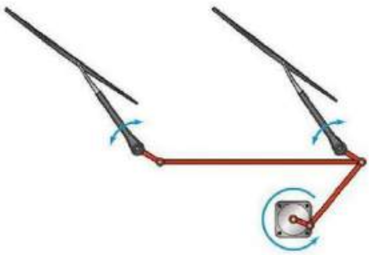
Все остальные маршруты, соединяющие Москву и Петропавловск- Камчатский, в том числе тот, который казался прямым на карте, на глобусе (и в реальности!) будут длиннее этой дуги.

Итак, кратчайшая траектория полёта самолёта определяется дугой большой окружности.

Стеклоочистители автомобиля

Все видели как «дворники» (стеклоочистители) смахивают воду с лобового стекла машины. Но задумывались ли вы, что и как приводит их в действие?

У каждого стеклоочистителя единственная точка крепления, длинный рычаг (поводок) и щётка, плотно прилегающая к стеклу. При таких условиях даже просто заставить «дворники» двигаться в одном направлении —задача нелёгкая.



И уж совсем непонятно, как можно реализовать возможность быстрого и плавного переключения — смены направления движения «дворников». Как и во многих других сюжетах в этой книге, на помощь приходит геометрия.

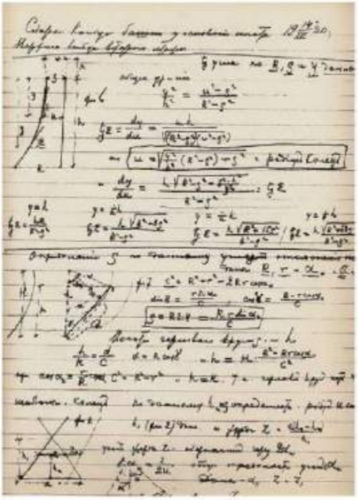
Если открыть капот и снять кожухи, то можно увидеть, что движение «дворников» обеспечивает единственный моторчик. Во время работы моторчика его ось вращается только в одном направлении.
А плоский шарнирный механизм, называемый трапецией дворников, преобразует безостановочное одностороннее вращение оси моторчика в согласованное вращение «дворников» то в одну сторону, то в другую. Смена направления движения «дворников» происходит без остановки моторчика.

Плоские шарнирные механизмы можно представлять как линейки разной длины, соединённые в концах гвоздиками. Шарнирные механизмы приметают, когда необходимо преобразовать заданное движение ведущего шарнира (например, по окружности) в функционально необходимое движение другого шарнира. Математический расчёт элементов конструкции шарнирного механизма — важный этап в процессе его создания.

Математические исследования шарнирных механизмов начались со времён изобретения Джеймсом Уаттом первой паровой машины. В XIX веке большую роль в этих исследованиях сыграл великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев. Изучение плоских шарнирных механизмов продолжается и в наше время.
Уже в XXI веке была доказана теорема «о подписи»—для любой подписи существует плоский шарнирный механизм, воспроизводящий эту подпись сколь угодно точно.

Шуховские башни

В 1920 и 1921 годах над малоэтажным в то время районом Шаболовки вырастала удивительная по красоте башня, причём росла «сама по себе» — рядом не было ни кранов, ни лесов. Сейчас эта150-метровая башня, построенная по проекту Владимира Григорьевича Шухова, — один из узнаваемых архитектурных символов Москвы.



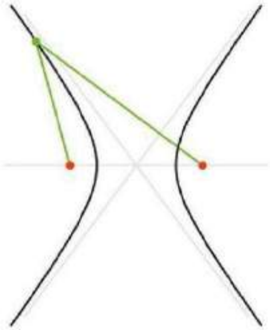
Дневник В. Г. Шухова сохранил для нас математические расчёты по проекту. Конструкция состоит из шести секций-гиперболоидов, каждая секция — «паутина», образованная прямыми стальными швеллерами, расположенными по образующим гиперболоидов.

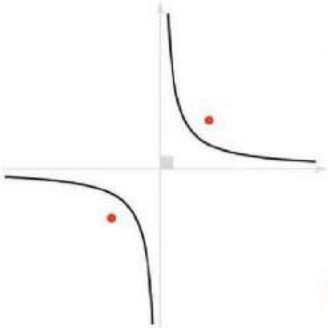
Гипербола — кривая на плоскости, модуль разности расстояний от любой точки которой до двух данных, называемых фокусами, постоянен. Гипербола является коническим сечением, наряду с эллипсом и параболой, но отличается от них тем, что у неё есть асимптоты — прямые, к которым она приближается, но никогда их не достигает. У изучаемой в школе гиперболы $y = 1/x$ асимптоты перпендикулярны друг другу и совпадают с осями декартовой системы координат.

При вращении гиперболы вокруг её оси симметрии, перпендикулярной отрезку с концами в фокусах, получается поверхность — однополостный гиперболоид вращения.

Оказывается, что через каждую точку гиперболоида проходят две прямые, полностью лежащие на нём. Каждая из них при вращении вокруг оси гиперболоида «заметает» всю поверхность. Такие линии называются образующими. Образующие делятся на два семейства: в одно семейство попадают те образующие, которые при вращении вокруг оси переходят друг в друга. Соответственно и однополостный гиперболоид двумя способами можно представить как своеобразный «паркет», выложенный прямыми одного семейства.

Таким образом, изогнутая поверхность состоит из прямых. Именно это свойство и использовал В. Г. Шухов: каждая секция башни на Шаболовке «соткана» из образующих двух семейств.





В. Г. Шухов спроектировал и построил в России более двухсот гиперболоидных водонапорных башен. При этом каждый проект был уникален — выполнение технических требований соединялось с архитектурной привязкой к местности. А первая такая конструкция была представлена на Всероссийской промышленной и художественной выставке, проходившей в 1896 году в Нижнем Новгороде.

Ещё несколько известных примеров. Для перехода линии электропередач НиГРЭС через Оку под Нижним Новгородом были сооружены четыре гиперболоидные опоры высотой 128 метров. Под Херсоном до сих пор сохранились большой и малый маяки гиперболоидной конструкции.

За последние десятилетия в разных странах появилось несколько высотных гиперболоидных сооружений. И все их авторы признают огромный вклад, который внёс в разработку таких конструкций великий инженер и учёный Владимир Григорьевич Шухов.

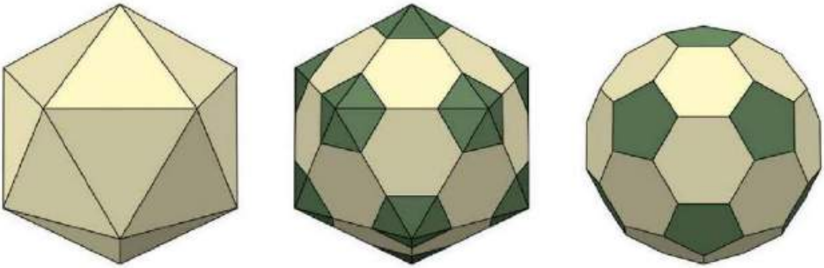
Футбольный мяч

Поверхность классического футбольного мяча состоит из «слегка искривлённых» 12 правильных пятиугольников чёрного цвета и 20 правильных белых шестиугольников. Модель мяча можно представить следующим образом.

Из 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников с равными сторонами можно сложить многогранник, называемый усечённым икосаэдром.

Икосаэдр — один из пяти правильных многогранников. У икосаэдра 12 вершин, 20 граней — правильных треугольников, 30 рёбер. «Отрежем» (отсечём) вершины икосаэдра, отступив от вершин вдоль прямых, направленных в центр, на столько, чтобы оставшиеся части граней были правильными шестиугольниками. Очевидно, что срезы будут правильными пятиугольниками. Получившаяся фигура и есть усечённый икосаэдр.

Усечённый икосаэдр — один из полуправильных многогранников. Так называются многогранники, у которых все грани — правильные многоугольники нескольких разных типов (в отличие от правильных многогранников, все грани которых — одинаковые правильные многоугольники), а все вершины устроены «одинаково», т. е. многогранные углы при вершинах равны (совместимы).



При «наполнении воздухом» усечённого икосаэдра он принимает форму сферы, становится футбольным мячом. При этом вершины усечённого икосаэдра совпадут с «вершинами мяча», рёбра перейдут в швы, а грани — в «слегка искривлённые» многоугольники на поверхности мяча. Таким образом получится модель мяча — центральная проекция усечённого икосаэдра на сферу.

Калейдоскоп

Калейдоскоп был придуман в начале XIX века. Это оптическое устройство, состоящее из трёх зеркал прямоугольной формы, сложенных в виде призмы («трубки») с треугольным сечением.

В одном из оснований призмы — двойное стеклянное дно, между стёклами насыпаны мелкие разноцветные предметы. В противоположном основании призмы — окуляр. При фиксированном положении калейдоскопа из предметов складывается картинка в «основном» треугольнике. Она многократно отражается в стенках-зеркалах, и наблюдатель через окуляр видит симметрично-правильный разноцветный узор.

При повороте калейдоскопа предметы пересыпаются, возникает новый, но тоже правильный узор. Важно, что видимая картина «устойчива», не изменяется при небольших шевелениях калейдоскопа.

Чтобы узор был «устойчивым» и симметричным—лишь в этом случае устройство называют калейдоскопом, — для построения призмы подходят только три вида треугольников.

В самом распространённом типе калейдоскопов треугольник в сечении призмы — равносторонний, у которого углы равны 60°. Этот вариант удобен и с производственной точки зрения — все зеркала одинаковые.

Два других варианта — прямоугольные треугольники с углами 90°—45°—45° и 90°—60°—30°.

Если рассматривать призмы не только с треугольным основанием, то калейдоскоп можно построить и на основе прямоугольника.

Оглавление